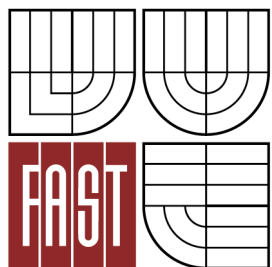




VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STAVEBNÍ
ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING
INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

STUDIE NÁRAZU DOPRAVNÍHO PROSTŘEDKU DO STAVEBNÍ KONSTRUKCE

STUDY OF IMPACT OF A TRANSPORT VEHICLE INTO A STRUCTURE

DIPLOMOVÁ PRÁCE
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

Bc. ŠÁRKA SYCHROVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

doc. Ing. IVAN NĚMEC, CSc.

BRNO 2013



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STAVEBNÍ

Studijní program	N3607 Stavební inženýrství
Typ studijního programu	Navazující magisterský studijní program s prezenční formou studia
Studijní obor	3607T009 Konstrukce a dopravní stavby
Pracoviště	Ústav stavební mechaniky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Diplomant	Bc. ŠÁRKA SYCHROVÁ
Název	Studie nárazu dopravního prostředku do stavební konstrukce
Vedoucí diplomové práce	doc. Ing. Ivan Němec, CSc.
Datum zadání diplomové práce	31. 3. 2012
Datum odevzdání diplomové práce	11. 1. 2013
V Brně dne 31. 3. 2012	

.....
prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.
Vedoucí ústavu

.....
prof. Ing. Rostislav Drochytka, CSc.
Děkan Fakulty stavební VUT

Podklady a literatura

I. Němec et al.: Finite Element Analysis of Structures.

E.A. de Souza Neto, D. Perič, D. R. J.Owen: Computational Methods for Plasticity.

Zásady pro vypracování

Cílem práce je prozkoumat možnosti řešení účinku nárazu dopravního prostředku do stavební konstrukce pomocí programového systému RFEM.

Předepsané přílohy

.....
doc. Ing. Ivan Němec, CSc.
Vedoucí diplomové práce

Abstrakt

Diplomová práce se zabývá analýzou nárazu dopravního prostředku do stavební konstrukce v programovém systému RFEM. Dopravní prostředek představuje v této práci běžné dopravní letadlo a konstrukci reprezentuje kontejnment jaderné elektrárny. Cílem práce bylo prozkoumání možnosti řešení účinku nárazu dopravního prostředku do stavební konstrukce v programu RFEM a stanovení rozsahu poškození konstrukce na základě numerické simulace.

Klíčová slova:

explicitní metoda, geometrická nelinearita, náraz, numerická stabilita, plasticita, RFEM

Abstract

Master's thesis deals with the analysis of the impact of transport vehicle on a building structure. Transport vehicle is represented by an airliner and building structure is represented by a containment of a nuclear power plant. The aim of thesis was to explore the possibility of numerical simulation of an impact of transport vehicle on a building structure utilizing the RFEM program and evaluation of the damage extent.

Keywords:

explicit method, geometrical nonlinearity, impact, numerical stability, plasticity, RFEM

Bibliografická citace VŠKP

SYCHROVÁ, Šárka. *Studie nárazu dopravního prostředku do stavební konstrukce*. Brno, 2013. 82 s., Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky. Vedoucí práce doc. Ing. Ivan Němec, CSc..

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval(a) samostatně a že jsem uvedl(a) všechny použité informační zdroje.

V Brně dne 30.12.2012

.....
podpis autora
Šárka Sychrová

Poděkování

Chtěla bych poděkovat vedoucímu mé diplomové práce doc. Ing. Ivanu Němcovi, CSc. za jeho cenné rady, čas a trpělivost při konzultacích. Dále bych chtěla poděkovat dalším pracovníkům firmy FEM consulting a to především Ing. Ivanu Ševčíkovi, Ph.D., Ing. Radku Rusinovi, Ph.D., Ing. Jaromíru Kabeláčovi a Ing. Lukáši Weisovi za jejich pomoc při vypracování diplomové práce.

OBSAH

1	ÚVOD.....	9
2	GEOMETRICKÁ NELINEARITA.....	11
2.1	Míry deformace	14
2.2	Míry napjatosti	16
2.3	Formulace geometrické nelinearity	18
3	MATERIÁLOVÁ NELINEARITA.....	23
3.1	Plasticita	23
3.2	Obecný elastoplastický konstitutivní model	25
3.3	Podmínky plasticity	30
4	EXPLICITNÍ METODA.....	38
4.1	Metoda centrálních diferencí	39
4.2	Stabilita	41
4.3	Diagonální matice hmotnosti	44
5	ŘEŠENÁ ÚLOHA.....	45
5.1	Model kontejnmentu	45
5.2	Model letadla	47
5.3	Koncepce řešení	48
5.4	Zatížení kontejnmentu	48
5.5	Numerické řešení	51
5.6	Vliv velikosti časového kroku na stabilitu	53
5.7	Tlumení	59
5.8	Parametrická studie železobetonového kontejnmentu	65
5.9	Parametrická studie ocelového kontejnmentu	70
5.10	Vyhodnocení výsledků	72
6	ZÁVĚR.....	74

1 ÚVOD

Počítačové simulace se staly důležitým nástrojem využívaným při návrhu a posuzování konstrukcí. Vývoj akademického i komerčního výpočetního softwaru je pevně spjat s růstem výpočetního výkonu (rozvojem počítačové architektury) a jeho dostupností. Boom počítačové techniky a její zlevňování v posledním desetiletí zvýšil poptávku po výpočetních aplikacích, která iniciovala prudký rozvoj v této oblasti. V současné době se odvětví výpočtové mechaniky a dynamiky snaží redukovat náklady a zvýšit efektivnost návrhu a posuzování konstrukcí. Jednou z možných cest je snížení počtu skutečných prototypů a reálných modelů konstrukcí (ve zmenšeném měřítku), které se používají např. při crashtestech nebo zátěžových zkouškách, jejich částečným nahrazením počítačovou simulací.

Tato diplomová práce se zabývá nárazem dopravního prostředku do stavební konstrukce. Cílem práce bylo prozkoumat možnosti řešení účinku nárazu dopravního prostředku do stavební konstrukce pomocí programového systému RFEM a určit rozsah poškození stavební konstrukce od nárazu dopravního prostředku na základě numerické simulace. Vzhledem k tomu, že implicitní metoda v nelineární dynamice (Newmarkova metoda) není vhodná pro řešení rychlých dynamických jevů jako je řešení odezvy na zatížení nárazem, byla explicitní metoda konečných prvků vybrána z hlediska cíle diplomové práce jako jediná vhodná. Stavební konstrukce byla v řešené úloze reprezentována kontejnmentem jaderné elektrárny. Za dopadající těleso bylo zvoleno běžné dopravní letadlo. V rámci diplomové práce byla provedena parametrická studie odezvy dvou materiálově odlišných typů kontejnmentů. Proměnný parametr představuje tloušťka stěny analyzované konstrukce. Úloha byla řešena explicitní metodou konečných prvků v programu RFEM, který je pro výpočty stavebních konstrukcí nejpoužívanějším programem v Německu a v rámci EU zaujímá téměř 20 % trhu. Práce je také příspěvkem k rozvoji explicitní metody v tomto programu. Vyvíjený solver pro explicitní metodu bude použit také v programu SCIA Engineer, který v rámci EU zaujímá srovnatelnou pozici na trhu jako RFEM.

Jedním ze sekundárních cílů práce bylo seznámení se s problematikou oblastí výpočtové dynamiky těles, která se zabývá analýzou rychlých dynamických jevů. Mezi tyto jevy se řadí např. simulace odezvy konstrukce na zatížení nárazem nebo výbuchem, průstřely nebo tváření a obrábění kovů. Důraz byl kladen především na specifickou metodu řešení, tj. explicitní metodu konečných prvků, která je na tento druh problémů s úspěchem aplikována (viz kap. 4 této práce).

Práce je tvořena dvěma částmi a to teoretickou a praktickou. Teoretická část práce sestává z kapitol 2 až 4. Úvod do teorie geometrické nelinearity je předmětem kapitoly 2. Materiálová nelinearita je představena v kapitole 3. Poslední kapitola teoretického oddílu práce (kapitola 4) je uvedením do problematiky explicitní metody konečných prvků. V praktické části práce (kapitola 5) je popsáno řešení úlohy stanovení odezvy kontejnmentu na zatížení od nárazu dopravního letadla. V podkapitolách tohoto

oddílu jsou rozebrány specifické problémy nelineární dynamické analýzy provedené explicitní metodou, tj. numerická stabilita a stanovení velikosti útlumu konstrukce.

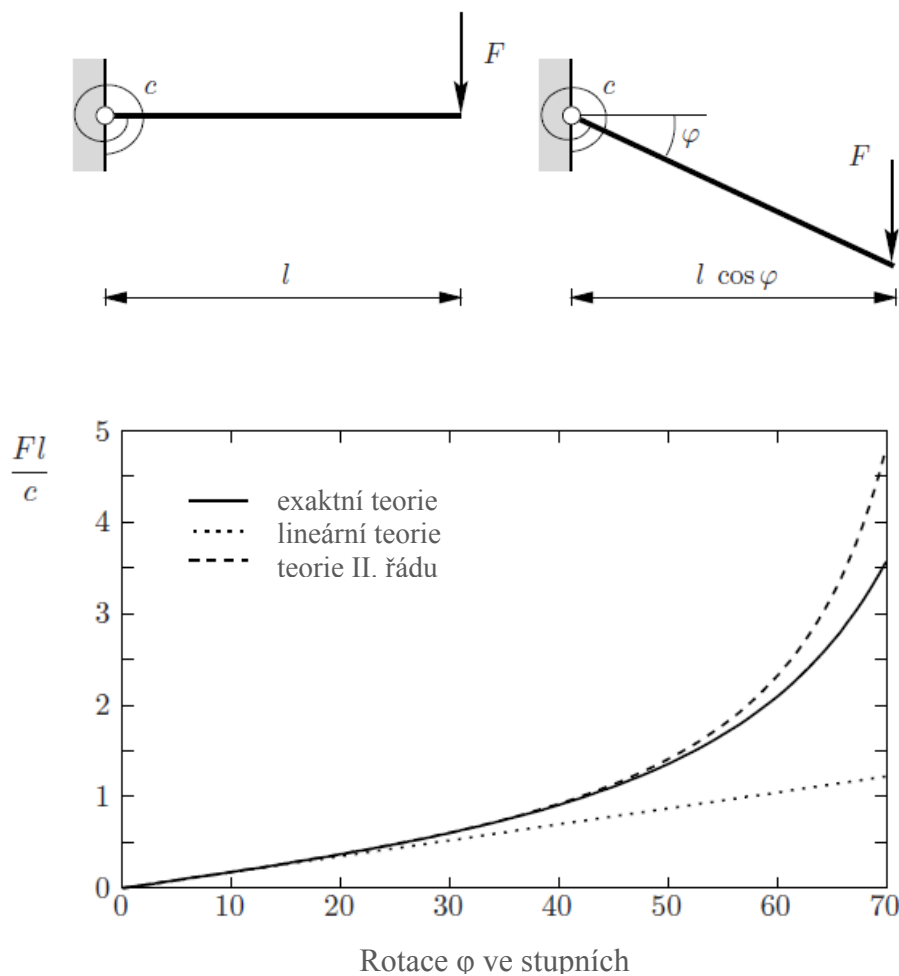
Diplomová práce je také příspěvkem k mezinárodní diskuzi o bezpečnosti jaderných elektráren, která zesílila v březnu roku 2011 po havárii v jaderné elektrárně Fukušima způsobené zemětřesením a následnou tsunami.

2 GEOMETRICKÁ NELINEARITA

V lineární mechanice kontinua se využívá předpokladu, že deformace (posunutí a rotace uzlů) jsou dostatečně malé (infinitesimální) a lze tak zanedbat vliv změn v geometrické konfiguraci tělesa (konstrukce). Velikost deformací je tedy v rámci lineárního přístupu omezena. Podmínky rovnováhy jsou formulovány na nedeformovaném tělese (teorie I. řádu) a vztah posunutí a přetvoření je lineární.

V případě, že změny geometrie mají nezanedbatelný vliv na chování (tuhost) konstrukce, je nutné provést geometricky nelineární analýzu. [11] Rovnice rovnováhy jsou pak sestavovány na deformovaném tělese. Zdrojem nelinearity jsou geometrické rovnice (vztahy mezi posunutím a přetvořením). [1] Zavedením geometrické nelinearity je odstraněno omezení velikosti deformace. [12]

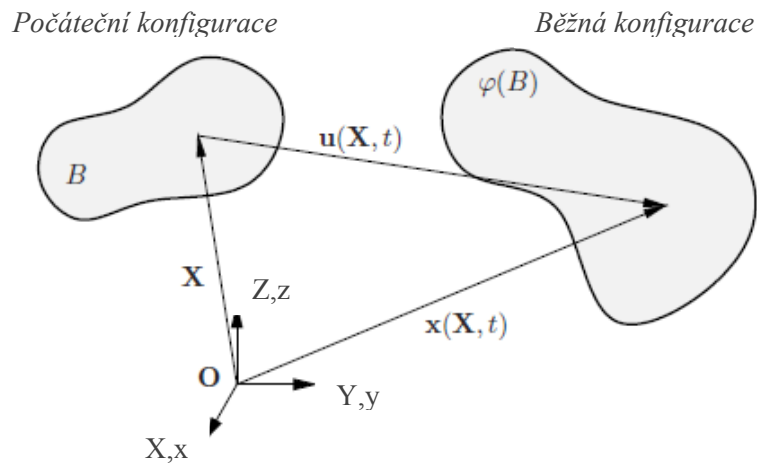
Lineární teorie často poskytuje dostatečně přesnou aproximaci skutečného chování konstrukcí. Mezi výhody lineární analýzy patří možnost uplatnit princip superpozice a relativní jednoduchost a menší časová náročnost řešení (řešení soustavy lineárních rovnic s větším počtem pravých stran při jednom běhu). [1] Přes zjevný úspěch a oblibu lineárního přístupu je ale zřejmé, že lineární teorie v mnoha případech neposkytuje uspokojivé výsledky. [11] Na obr. 2.1 je pro ilustraci uvedeno srovnání analýzy tuhé konzoly zatížené na volném konci provedené dle lineární a nelineární teorie. Je zřejmé, že pro malé rotace se obě teorie velmi blíží přesnému řešení. Pro velké rotace výsledky získané nelineární analýzou konvergují k přesnému řešení (přesné řešení soustavy nelineárních rovnic obvykle není možno získat, jen je možné se k němu iterativně blížit), ovšem výsledky lineární analýzy jsou již nepřijatelné. [8]



Obr. 2.1 Porovnání lineární teorie a teorie II. řádu na jednoduchém příkladu¹

Při řešení velkých posuvů, rotací a deformací je nutné rozlišovat výchozí a výslednou (běžnou) konfiguraci tělesa [14] (viz obr. 2.2).

¹ WRIGGERS, P., *Nonlinear Finite Element Methods*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008, p. 8



Obr. 2.2 Počáteční (nedeformovaná) a běžná (deformovaná) konfigurace tělesa²

Pro účely geometricky nelineární analýzy se zavádí dva základní souřadné systémy:

Eulerovský (prostorový) souřadný systém se vztahuje k běžné (aktuální, deformované) konfiguraci tělesa. Jeho souřadnice jsou označovány \mathbf{x} a určují polohu bodu v prostoru.

Lagrangeovský (materiálový) souřadný systém je vztažen k počáteční konfiguraci tělesa. Souřadnice jsou označovány \mathbf{X} a určují materiálový bod tělesa. Každému bodu tělesa jsou přiřazeny jedny materiálové souřadnice. [1] [12]

Geometrickou nelinearitu lze formulovat na počáteční konfiguraci tělesa v materiálových souřadnicích (formulace total Lagrangian) nebo na běžné konfiguraci v prostorových souřadnicích (updated Lagrangian). [1] V závislosti na zvolené referenční konfiguraci jsou vybrány vhodné míry deformace a napjatosti. V rámci definic jejich vztahů je pak geometrická nelinearita zavedena. [15]

Některé míry deformace a napjatosti používané v nelineární mechanice kontinua jsou uvedeny v následujících kapitolách se zdůrazněním, na které konfiguraci jsou definovány.

² WRIGGERS, P., *Nonlinear Finite Element Methods*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008, p. 8

2.1 Míry deformace

Belytschko, Liu a Moran³ uvádějí, že hlavním důvodem pro zavržení obvykle aplikovaných lineárních vztahů mezi přetvořením a posunutím je nesplnění požadavku na nulovou deformaci při pohybu tělesa jako tuhého celku (rigid body condition⁴). Míra deformace by měla splňovat samozřejmě i další kriteria, např. by se měla zvětšovat s nárůstem deformace. [1]

Logaritmická míra deformace

Pro případ jednodimenzionálního prodloužení tyče délky l navrhl r. 1909 Ludwik logaritmickou míru deformace definovanou jako integrál z dl/l . [16] Dle Němce⁵ lze pro 1D vyjádřit:

$$d\varepsilon_n = \frac{dl}{l} \rightarrow \varepsilon_n = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln(1 + \varepsilon_x) \quad (2.1.1)$$

kde ε_x je lineární deformace

l_0 počáteční délka
 l výsledná délka

Hencky roku 1928 rozšířil možnost využití logaritmické míry deformace i pro 3D analýzu. Aplikace této míry deformace zůstaly i nadále omezené kvůli komplexnosti jejího vyčíslování, tzn. kvůli nárokům na výpočetní výkon počítačů. Dnes nejsou požadavky na vysoký výkon překážkou a logaritmická míra deformace se opět dostává do středu zájmu. Někteří badatelé věří, že fyzikální míry deformace (logaritmická) by mohly při velkých deformacích narozdíl od topologických měr deformace (Greenova, Almansiho) vést k jednodušším konstitutivním rovnicím popisujícím materiálové chování. [16] Logaritmická míra deformace je v každém okamžiku vztažena k běžné konfiguraci a je inkrementální povahy. Uplatňuje se při velkých deformacích. [1]

Green-Lagrangeův tenzor deformace

Někdy nazývaný jednoduše Greenův tenzor deformace [13] je vztažen k počáteční (nedeformované) konfiguraci. Definován je tedy v materiálových souřadnicích

³ BELYTSCHKO, T., LIU, W. K., MORAN, B., *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley & Sons Ltd., 2000, p. 21

⁴ YANG, Y. B., *Rigid Body Criteria in Nonlinear Element Formulation*, 1991, p. 101

⁵ NĚMEC, I., *Nelineární mechanika*, studijní opora, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Ústav stavební mechaniky, Brno, 2006, str. 26

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}\right) \quad (2.1.2)$$

kde \mathbf{F} je deformační gradient

\mathbf{I} jednotkový tenzor (matice)

\mathbf{C} pravý Cauchy-Greenův deformační tenzor

\mathbf{u} vektor posunutí

Greenův tenzor deformace je nejběžněji používaný pro materiály vystavené malým deformacím. [16] Jednotlivé komponenty Green-Lagrangeova tenzoru deformace lze podrobně rozepsat následovně⁶

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)^2 \right] \\ E_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right)^2 \right] \\ E_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right)^2 \right] \\ E_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ E_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) \\ E_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) \end{aligned}$$

Euler-Almansiho tenzor deformace

Euler-Almansiho tenzor deformace je analogický ke Green-Lagrangeovu tenzoru deformace. [11] Je vztažen k běžné konfiguraci a je tedy definován v prostorových souřadnicích [1]:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\right) \quad (2.1.3)$$

kde \mathbf{F} je deformační gradient

\mathbf{I} jednotkový tenzor (matice)

\mathbf{B} levý Cauchy-Greenův deformační tenzor

\mathbf{u} vektor posunutí

⁶ REDDY, J.N., *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford University Press, p. 332

Infinitezimální tenzory deformace

Při velmi malých deformacích lze zanedbat členy druhého řádu v Greenově tenzoru deformace. Vznikne tak infinitezimální tenzor deformace, který je shodný s lineárním tenzorem deformace. [1]

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{X}} \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{F} + \mathbf{F}^T) - \mathbf{I} \quad (2.1.4)$$

kde \mathbf{F} je deformační gradient

\mathbf{I} jednotkový tenzor (matice)

\mathbf{u} vektor posunutí.

Analogicky lze infinitezimální tenzor deformace definovat v prostorových souřadnicích

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad (2.1.5)$$

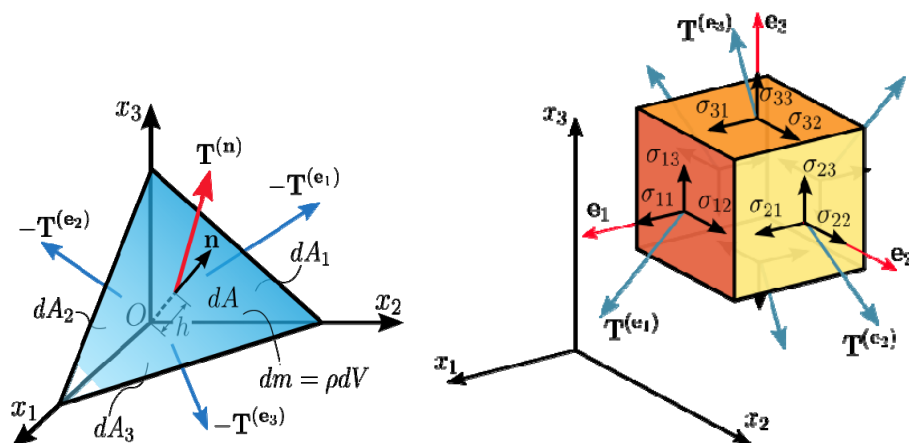
kde \mathbf{u} je vektor posunutí.

Na rozdíl od lineární mechaniky kontinua je v nelineární mechanice využíváno větší množství měr deformace. Ke každé míře deformace jsou pak definovány energeticky konjugentní míry napjatosti [14] (energie je skalární veličina nezávislá na volbě souřadnicového systému [1]). Velká rozmanitost energeticky konjugentních párů tenzorů deformace a napjatosti poskytuje možnost sestavit nejvhodnější konstitutivní model popisující materiálové chování pro daný stav deformace a režim přetvoření (od velmi malých po velká). [14]

2.2 Míry napjatosti

Cauchyho napětí

Z rovnováhy sil na tzv. Cauchyho tetrahedronu (obr. 2.2.1) byl odvozen Cauchyho princip (Cauchyho 1. teorém), který definuje tenzor napětí druhého řádu (Cauchyho tenzor napjatosti). [14]



Obr. 2.2.1 Cauchyho tetrahedron a složky tenzoru napětí v prostoru [37]

Tento (Cauchyho) princip lze vyjádřit jako [1]

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (2.2.1)$$

kde \mathbf{T} je vektor napětí

$\boldsymbol{\sigma}$ tenzor napětí (2. řádu)

\mathbf{n} vektor normály.

Cauchyho tenzor napjatosti

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.2.2)$$

Velmi zjednodušeně je Cauchyho napětí síla/výsledná plocha. Jedná se o napětí definované na běžné konfiguraci tělesa. [17] Z těchto důvodů je Cauchyho napětí často nazýváno skutečné napětí (true stress). Energeticky konjugentní pár tvoří s logaritmickou mírou deformace.

Korotační napětí

V rámci korotační formulace byl v 60. letech minulého století zaveden souřadnicový systém, který se otáčí stejnou úhlovou rychlostí jako materiál. [18] Tímto způsobem je eliminován vliv rotace tělesa jako tuhého celku na hodnotu napětí a je splněna tzv. objektivita tenzoru napětí. Korotační napětí lze získat transformací Cauchyho napětí do pootočené souřadnicové soustavy [1]

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R} \quad (2.2.3)$$

kde \mathbf{R} je tenzor rotace
 $\boldsymbol{\sigma}$ Cauchyho tenzor napětí.

Tenzor rotace je transformační tenzor pro čistou rotaci (bez deformace). Lze ho obecně získat polární dekompozicí deformačního gradientu. Teorém polární dekompozice umožňuje rozklad deformace materiálového elementu na čistou rotaci a čistou deformaci (deformaci danou stretch tenzorem). V závislosti na pořadí, ve kterém je daná složka deformačního gradientu aplikována na materiálový element, použije se levý stretch tenzor \mathbf{V} nebo pravý stretch tenzor \mathbf{U} . Rozklad deformačního gradientu je pak vyjádřen $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$ (nejprve deformace \mathbf{U} a následně rotace \mathbf{R}) nebo $\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$ (nejprve rotace). Tenzory \mathbf{U} a \mathbf{V} jsou symetrické. [1] Vzhledem k tomu, že tenzor rotace vyjadřuje jen rotaci tělesa jako tuhého celku, platí že $\det \mathbf{R} = 1$. Potom platí, že Jakobián

$$J = \frac{dV}{dV_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = \det \mathbf{F} = \det \mathbf{U} = \det \mathbf{V}$$

2.3 Formulace geometrické nelinearity

V mechanice těles se běžně rozlišují dva základní přístupy. Jedná se o formulaci total Lagrangian, v rámci které jsou derivace a integrace vztaženy k původní konfiguraci tělesa (řešení v materiálových souřadnicích) a formulaci updated Lagrangian, která vztahuje derivace a integrace k běžné konfiguraci tělesa (v prostorových souřadnicích). Lagrangian v názvu obou formulací odkazuje na Lagrangeovské prvky (sítě). [3] Tyto prvky se deformují spolu s deformací tělesa narozdíl od Eulerovských prvků, které zůstávají při deformaci tělesa neměnné. V mechanice těles se obvykle používají Lagrangeovské prvky. Eulerovské prvky se často používají v mechanice tekutin. V Eulerovských sítích hmota přechází z jednoho prvku do druhého v souladu se zákonem zachování hmoty.

Ve formulaci total Lagrangian jsou deformace popsány Greenovým tenzorem deformace a napětí tenzorem druhého napětí Piola-Kirchhoff. Výhodou této formulace je objektivita tenzoru deformace i napětí, tj. oba tenzory jsou nezávislé na pozorovateli. Její nevýhodou je složitější formulace tečné matice tuhosti a skutečnost, že tato formulace je vzdálenější inženýrskému chápání problému.

Formulace updated Lagrangian pracuje s Euler-Almansiho tenzorem deformace a Cauchyho (true stress) nebo Kirchhoffovým napětím. Oba tyto tenzory jsou vždy vztaženy ke konfiguraci, ve které se těleso nachází na začátku iterace. Výhodou je jednoduchá formulace tečné matice tuhosti a fakt, že se při výpočtu stále pracuje se skutečným tvarem tělesa i se skutečným napětím. Nevýhodou je, že Cauchyho ani

Kirchhoffovo napětí není objektivní a musí být ve formulaci nahrazeno některým z objektivních toků napětí.

Zvolením jednoho z popsaných přístupů tedy zároveň dochází k určení typu formulace geometrické nelinearity, která se objeví v systému řešených rovnic. [19]

Updated Lagrangian [15] [14]

V následujících odstavcích jsou formulovány základní rovnice používané v mechanice na běžné konfiguraci.

Zákon zachování hmoty/hmotnosti

Tento princip byl s odstupem několika let nezávisle objeven v druhé polovině 18. století Antoinem Lavoisierem a Michaiilem V. Lomonosovem. Ze zákona zachování hmoty vyplývá, že hmota nemůže být vytvořena (z ničeho) ani zničena. Hmotnost izolovaného (uzavřeného) systému je tedy konstantní v čase. [39]

Lze vyjádřit změnu hustoty tělesa v závislosti na deformaci [1]:

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{\rho_0(\mathbf{X})}{J} \quad (2.3.1)$$

$$J = \det(\mathbf{F}) \quad (2.3.2)$$

kde ρ je hustota deformovaného tělesa (v běžné konfiguraci)

ρ_0 počáteční hustota tělesa (v referenční konfiguraci)

J Jakobián

\mathbf{F} deformační gradient.

Zákon zachování hybnosti

Newtonovy pohybové zákony implikují následující: V uzavřeném systému zůstává (je) celková hybnost konstantní. [20] Tento fakt je znám jako zákon zachování hybnosti.

Zákon zachování lineární hybnosti [1]:

(lokální silová rovnováha [21])

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \rho \dot{\mathbf{v}} \quad (2.3.3)$$

kde $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ je divergence Cauchyho napětí (síla na jednotku objemu)

\mathbf{f}	vektor objemových sil (včetně tlumících sil)
$\mathbf{\dot{v}}$	vektor zrychlení
ρ	hustota.

Zákon zachování úhlové hybnosti (točivosti) je pro rotující tělesa analogií výše popsaného zákona zachování lineární hybnosti. Z lokální rovnováhy momentů hybnosti vyplývá symetrie tenzoru Cauchyho napětí [8].

Zákon zachování energie

Tento zákon zachování byl poprvé formulován v 19. století. Říká, že v uzavřeném systému energie nevzniká ani nezaniká, pouze se přeměňuje z jedné formy na druhou. Celková energie tohoto systému zůstává konstantní.

V mechanice těles vyjadřuje zákon zachování energie rovnost mezi rychlostí změny hustoty potenciální energie a rozdílem výkonu zatížení a rychlostí disipace (při zanedbání zdrojů tepelné energie) [1]:

$$J\dot{w}^{int} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (2.3.4)$$

kde \dot{w}^{int} je rychlost změny hustoty potencionální energie vnitřních sil

J	Jakobián
\mathbf{D}	tenzor rychlosti deformace
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchyho napětí
\mathbf{q}	vektor tepelného toku.

Konstitutivní rovnice

Vztah mezi napětím a deformací v běžné konfiguraci lze vyjádřit pomocí objektivního toku napětí [1]

$$\boldsymbol{\sigma}^\nabla = \mathbf{S}_t^{\sigma D}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}, \dots) \quad (2.3.5)$$

kde $\boldsymbol{\sigma}^\nabla$ je objektivní tok napětí

$\mathbf{S}_t^{\sigma D}$ funkce závislá na Cauchyho napětí, rychlosti deformace (příp. i dalších proměnných).

Přírůstková (linearizovaná) forma konstitutivní rovnice je definována [1]

$$\delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{\sigma e} : \delta \mathbf{e} \quad (2.3.6)$$

kde $\boldsymbol{\sigma}$ je Cauchyho napětí

$C^{\sigma e}$ tečný modul materiálu
 e Euler-Almansiho tenzor deformace.

Geometrická rovnice

Ve formulaci updated Lagrangian se používá Euler-Almansiho tenzor deformace, který je definovaný (na běžné konfiguraci) rovnicí 2.1.3.

Total Lagrangian

V následujících odstavcích jsou formulovány základní rovnice používané v mechanice na původní konfiguraci.

Zákon zachování hmoty/hmotnosti [8]

$$\rho_0 = \rho J \quad (2.3.)$$

kde ρ je hustota deformovaného tělesa (v běžné konfiguraci)

ρ_0 počáteční hustota tělesa (v referenční konfiguraci)

J Jakobián.

Zákon zachování hybnosti [1]

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{N} + \mathbf{f}_0 = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.3.)$$

kde ∇_0 je materiálová divergence

\mathbf{N} nominální napětí

\mathbf{f}_0 vektor objemových sil v materiálových souřadnicích

ρ_0 hustota na referenční konfiguraci

$\ddot{\mathbf{u}}$ vektor zrychlení

I když je formulace total Lagrangian definována v materiálových souřadnicích, nelze pro zákon o zachování hybnosti použít druhé napětí Piola-Kirchhoff, které je definováno plně v materiálových souřadnicích. V materiálových souřadnicích totiž není zachováván směr v prostorových souřadnicích, ve kterých jsou definovány setrvačné síly (hybnost).

Z momentové rovnováhy nedeformovaném tělese plyne symetrie tenzoru druhého napětí Piola-Kirchhoff [21].

Zákon zachování energie [1]

$$\dot{w}^{int} = \dot{\mathbf{F}}^T : \mathbf{N} - \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_0 \quad (2.3.)$$

kde \dot{w}^{int} je rychlost změny hustoty potencionální energie vnitřních sil

$\dot{\mathbf{F}}^T : \mathbf{N}$ výkon vnitřních sil

\mathbf{N} nominální napětí

∇_0 materiálová divergence

\mathbf{q}_0 tepelný tok v materiálových souřadnicích

Konstitutivní rovnice

Přírůstková (linearizovaná) forma konstitutivní rovnice je definována [1]

$$\delta \mathbf{S} = \mathbf{C}^{SE} : \delta \mathbf{E} \quad (2.3.)$$

kde \mathbf{S} je druhé napětí Piola-Kirchhoff

\mathbf{C}^{SE} tečná materiálová tuhost vyjádřená na referenční konfiguraci

\mathbf{E} Green-Lagrangeův tenzor deformace.

Geometrická rovnice

Ve formulaci total Lagrangian se používá Green-Lagrangeův tenzor deformace definovaný (na referenční konfiguraci) rovnicí 2.1.2.

3 MATERIÁLOVÁ NELINEARITA

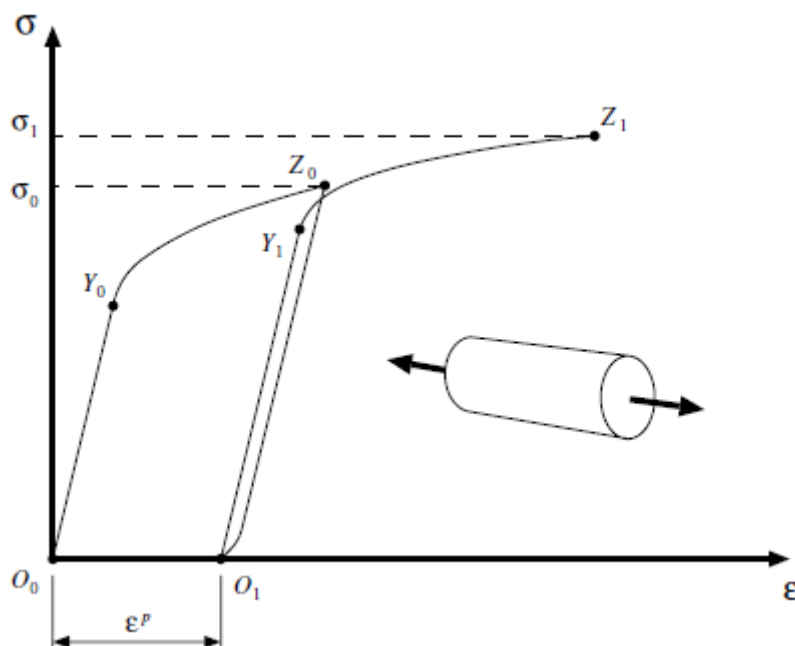
Druhým typem nelinearity rozlišovaným v mechanice těles je materiálová neboli fyzikální nelinearita, ve které jsou zdrojem nelinearit konstitutivní vztahy (fyzikální rovnice) [1]. Příkladem nelineárního chování materiálů je plasticita.

3.1 Plasticita

Počátky teoretického bádání v oblasti plasticity sahají do osmnáctého století (Coulomb, 1776). V průběhu devatenáctého století se objevovaly základní myšlenky týkající se plastické analýzy již v mnoha studiích uznávaných odborníků (Tresca, 1868, St. Venant, 1870, Rankine, 1876, Bauschinger, 1881 a další) [4]. Následoval významný rozvoj, především v první polovině dvacátého století, který vyústil v ucelenou teorii plasticity. Dnes stojí teorie plasticity na stabilním matematickém základu a je uznávána jako jeden z nejúspěšnějších konstitutivních modelů pevných materiálů [2].

Teorii plasticity lze aplikovat na chování širokého spektra materiálů používaných v technické praxi. Zjednodušeně lze říci, že teorie plasticity popisuje materiály, které po zatížení a následném úplném odtížení vykazují permanentní (plastické) deformace. Souhrnně jsou pak tyto materiály nazývány plastické. Mezi plastické materiály se řadí například kovy, betony, horniny a zeminy [2].

Přestože jsou vlastnosti jednotlivých plastických materiálů kvalitativně výrazně odlišné, vykazuje jejich chování významné společné znaky. Některé z nich mohou být pozorovány na schematickém pracovním diagramu kovového materiálu v tahu znázorněném na obr. 3.1.1.



Obr. 3.1.1 Tahová zkouška kovového materiálu⁷

Zkoušený vzorek byl nejprve zatěžován a před dosažením bodu Y_0 v pracovním diagramu byl odtížen. Z obrázku 3.1.1 je patrné, že nedošlo ke vzniku trvalých deformací. Vzorek byl dále zatěžován až do předepsané hodnoty osového napětí σ_0 (bod Z_0 v diagramu). Následně došlo k úplnému odtížení (bod O_1). Stav vzorku po odtížení se už neshoduje s výchozím stavem (bod O_0) a v diagramu lze pozorovat permanentní (plastickou) deformaci ϵ_p . Poté byl vzorek znovu zatěžován a před dosažením bodu Y_1 v pracovním diagramu byl zcela odtížen. Vzorek se v tomto případě vrátil do stavu před zatěžováním (bod O_1) a nedošlo k dalšímu rozvoji plastické deformace. Nakonec byl vzorek zatěžován až do dosažení vyšší předepsané hodnoty osového napětí σ_1 [2].

Na výše popsaném průběhu tahové zkoušky kovového materiálu lze identifikovat některé důležité vlastnosti plastických materiálů [2]:

1. Existence elastické oblasti, kde nedochází ke vzniku permanentních deformací. Platí zde Hookův zákon. Elastická oblast je ohraničena hodnotou napětí na mezi kluzu (yield stress)⁸.
(části O_0Y_0 a O_1Y_1 pracovního diagramu)

⁷ NETO, E. S., PERIC, D., OWENS, D., *Computational methods for plasticity: theory and applications*, John Wiley & Sons Ltd, 2008, p. 141

⁸ Nelineární závislost mezi napětím a přetvořením se vyskytuje již po překročení meze úměrnosti materiálu [7]. Přestože teoreticky vznikají plastické deformace po překročení meze elasticity, Lubliner ([5], p. 75-80) uvádí jako hranici elastické oblasti mez kluzu, která je významným bodem zejména pro měkké oceli a po jejímž překročení dochází k významnému rozvoji plastických deformací [7].

2. Pokud je materiál zatěžován nad hodnotu napětí na mezi kluzu, dochází k tečení materiálu, tedy ke vzniku plastických deformací.
3. Současně s rozvojem plastických deformací dochází k nárůstu hodnoty napětí na mezi kluzu materiálu. Tento jev je nazýván zpevnění materiálu⁹.
(odpovídající hodnota napětí na mezi kluzu je pro body Y_0 a Y_1 odlišná)

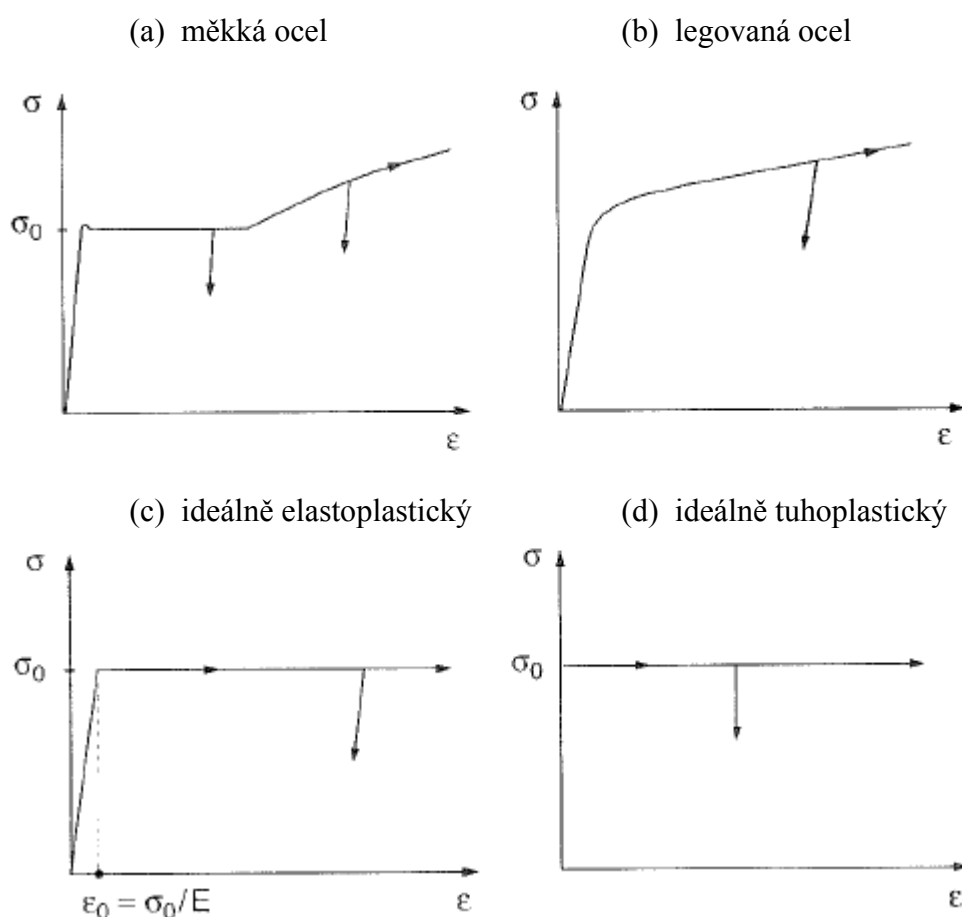
Fenomény vyjmenované výše jsou společné pro všechny elastoplastické materiály. Při jejich detekci u různých materiálů je pochopitelně nutné používat laboratorní procedury vhodné pro daný typ materiálu. Tahová zkouška je zde uvedena pouze jako příklad [2] [5].

Elastoplastické materiály se dále dělí na materiály, jejichž chování je závislé na rychlosti zatěžování (rate-dependent materials) a na materiály, jejichž chování není závislé na rychlosti zatěžování (rate-independent materials) [3]. Na první skupinu materiálů je aplikována teorie viskoplasticity a na druhou skupinu je aplikována teorie plasticity. Plasticita může být chápána jako limitní případ viskoplastického chování, jak je ukázáno v [4] a [5].

3.2 Obecný elastoplastický konstitutivní model

V rámci matematického popisu materiálu je materiálová odezva charakterizována konstitutivními vztahy. Soubor konstitutivních rovnic tvoří materiálový model, který by měl vystihovat typické vlastnosti materiálu pozorované během experimentů. Materiálový model je tedy zjednodušením (idealizací) skutečného chování materiálu. Na obr. 3.2.1 jsou pro ilustraci zobrazeny skutečné jednodimenzionální tahové pracovní diagramy (1D model) měkké (a) a legované (b) oceli a digramy znázorňující idealizované elastoplastické (c) a tuhoplastické (d) materiálové chování.

⁹ U křehkých materiálů (např. beton, keramika, led...) lze pozorovat opačný jev, kdy při rostoucí hodnotě deformace dochází ke snižování napětí. Tento jev se nazývá změkčení.[4] Typickým fenoménem je u mnoha materiálů zpevňování (zvýšení meze kluzu) při počátečním zatěžování a pozdější změkčování [4].



Obr. 3.2.1 Jednodimenzionální pracovní diagramy¹⁰

Vzhledem povaze řešeného problému popisuje soubor konstitutivních rovnic materiálové chování na mikroskopickém nebo makroskopickém měřítku. Existují tedy dva možné přístupy k sestavování konstitutivních rovnic [8]. Při klasickém přístupu, který bude následně podrobněji popsán, jsou konstitutivní materiálové modely formulovány přímo pomocí tenzorů napětí, tenzorů deformací a jejich invariantů (makroskopické měřítko). Objevují se ovšem názory¹¹, že se tento (klasický) přístup dostal do fáze, kdy lze za cenu značného úsilí dosáhnout pouze nevýznamného zlepšení konstitutivního modelu materiálu. Druhým možným přístupem je sestavení konstitutivního modelu pomocí vektorů napětí a deformace působících na plochy různých orientací uvnitř materiálu, který respektuje mikromechanické vztahy (microplane model, Bažant 1984¹²).

¹⁰ JIRÁSEK, M., BAŽANT, Z. P., *Inelastic Analysis of Structures*, John Wiley & Sons Ltd, 2002, 1st ed., p. 4

¹¹ JIRÁSEK, M., BAŽANT, Z. P., *Inelastic Analysis of Structures*, John Wiley & Sons Ltd, 2002, 1st ed., p. 489-505

¹² Tamtéž, p. 495

Základní komponenty obecného elastoplastického konstitutivního modelu jsou dle [2] a [6] :

- rozklad elastoplastické deformace
- elastický (Hookův) zákon
- podmínka plasticity (yield criterion)
- zákon plastického přetváření (plastic flow rule)
- zpevnění

Rozklad elastoplastické deformace

Tenzor deformace lze rozložit na elastickou (ϵ^e) a plastickou složku (ϵ^p):

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p \quad (3.2.1)$$

kde ϵ^e je elastický tenzor deformace

ϵ^p je plastický tenzor deformace.

Zobecněný Hookův zákon

V Hookově zákonu se v případě elastoplastických materiálů vyskytuje samozřejmě pouze elastická část (elastický tenzor) deformace:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}^e : \boldsymbol{\epsilon}^e \quad (3.2.2)$$

kde $\boldsymbol{\sigma}$ je tenzor napjatosti

\boldsymbol{D}^e matice pružné tuhosti

$\boldsymbol{\epsilon}^e$ tenzor deformace.

Podmínka plasticity

Prostřednictvím podmínky plasticity jsou charakterizovány stavy napětí, při kterých může (ale nutně nemusí) probíhat plastické přetváření materiálu. Podmínka plasticity je vyjádřena rovnicí:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{A}) = 0 \quad (3.2.3)$$

kde Φ je funkce plasticity

σ tenzor napjatosti
 A zpevňující termodynamické síly

Funkce plasticity je tedy rovna nule v případě, kdy je možný vznik plastických deformací, nabývá záporné hodnoty pro pružné stavy materiálu a pro stavy plasticky nepřipustné nabývá kladných hodnot.

Zákon plastického přetváření

Způsob, jakým dochází k nárůstu plastických deformací, je definován zákonem plastického přetváření:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} N(\sigma, A) \quad (3.2.4)$$

kde $\dot{\varepsilon}^p$ je rychlost plastické deformace

$\dot{\gamma}$ plastický násobitel
 N vektor toku (flow vector)

Tato rovnice je doplněna zatěžovacími respektive odtěžovacími podmínkami (podm. komplementarity):

$$\begin{aligned} \Phi &\leq 0 \\ \dot{\gamma} &\geq 0 \\ \dot{\gamma} \Phi &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Zpevnění

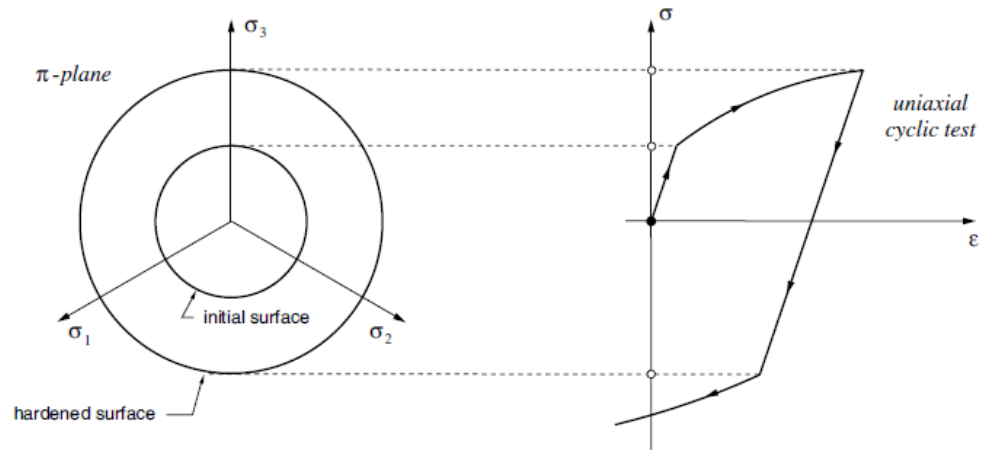
Zákon zpevnění (hardening law) je vyjádřen rovnicí ve tvaru:

$$\dot{\alpha} = \dot{\gamma} H(\sigma, A) \quad (3.2.6)$$

kde $\dot{\gamma}$ je plastický násobitel
 H zobecněný modul zpevnění
 A zpevňující termodynamická síla

Zpevnění je charakterizováno závislostí hodnoty meze kluzu na historii plastických deformací. Projevem zpevnění jsou změny zpevňujících termodynamických sil, které mohou ovlivnit tvar, velikost a orientaci plochy plasticity. Lze rozlišovat dva druhy zpevnění a to zpevnění izotropní a kinematické. Pokud není dovoleno zpevnění (není přípustné), jedná se o ideálně plastický model chování materiálu. [2]

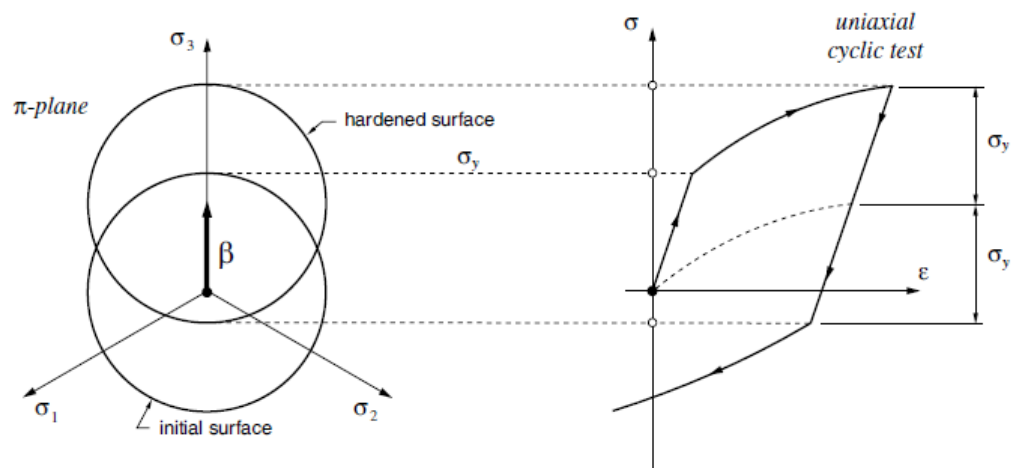
Při izotropním zpevnňování materiálu dochází k rovnoměrné (izotropní) expanzi výchozí plochy plasticity. Zobrazení plochy plasticity v rovině π a související pracovní diagram zpevňujícího materiálu (1D) je uveden na obr. 3.2.2.



Obr. 3.2.2 Izotropní zpevnění¹³

Pokud dochází k posunu výchozí plochy plasticity bez změny velikosti nebo tvaru, jedná se o kinematické zpevnění materiálu. Na obr. 3.2.3 je uveden pracovní diagram, ze kterého je zřejmé, že došlo ke zpevnění materiálu při zatěžování v jenom směru a zároveň ke změkčení materiálu ve směru opačném. Tento fenomén je označován jako Bauschingerův efekt, který lze modelovat právě zavedením kinematického zpevnění. Výchozí a zpevněná plocha plasticity je zobrazena v levé části obr. 3.2.3.

¹³ NETO, E. S., PERIC, D., OWENS, D., *Computational methods for plasticity: theory and applications*, John Wiley & Sons Ltd, 2008, p. 179



Obr. 3.2.3 Kinematické zpevnění¹⁴

Materiálový model, který se více blíží reálnému chování materiálů, lze dle Neta, Perice a Owense¹⁵ získat kombinací modelu s izotropním a kinematickým zpevněním. V takovém případě dochází k zároveň k translaci a změně tvaru, velikosti nebo orientace plochy plasticity.

3.3 Podmínky plasticity

V předchozí kapitole byla uvedena podmínka plasticity pouze v obecné formě. Pro různé skupiny materiálů je nutné definovat podmínku plasticity pomocí různých kritérií. V minulosti bylo vyvinuto značné úsilí ve snaze formulovat vhodnou podmínku plasticity. V této části práce budou představeny některé klasické (konvenční) podmínky. [2] [9]

Trescova podmínka plasticity

Jedná se o historicky nejstarší podmínku plasticity. Byla formulována Trescou (1886), který vycházel z výsledků experimentů zaměřených na chování kovů [10]. Tato podmínka je tedy určena pro popis plastického přetváření kovů. Předpokládá, že plastické tečení materiálu nastane, dosáhne-li maximální smykové napětí limitní (kritické) hodnoty. [2]

Matematicky je Trescova podmínka plasticity vyjádřena jako:

$$\tau_{max} = \tau_0 \quad (3.3.1)$$

¹⁴ NETO, E. S., PERIC, D., OWENS, D., *Computational methods for plasticity: theory and applications*, John Wiley & Sons Ltd, 2008, p. 186

¹⁵ Tamtéž, p. 189-190

kde τ_{max} je maximální smykové napětí

τ_0 kritická hodnota smykového napětí (shear yield stress).

Maximální smykové napětí je definováno:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}) \quad (3.3.2)$$

kde σ_{max} je maximální hlavní napětí

$$\sigma_{max} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (3.3.3)$$

σ_{min} minimální hlavní napětí

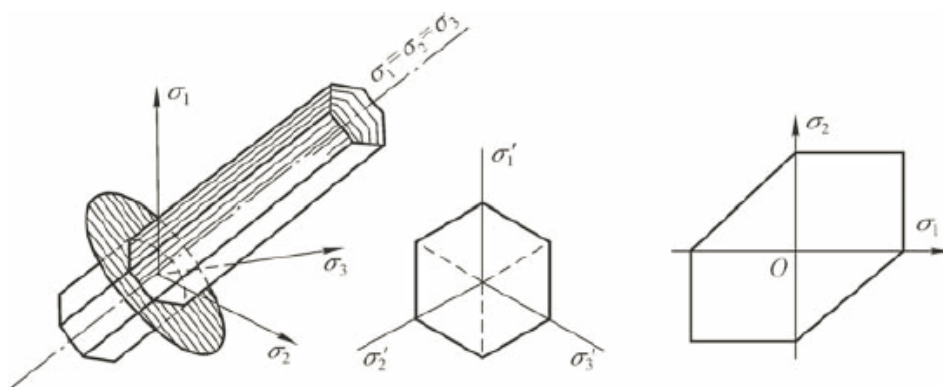
$$\sigma_{min} = \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (3.3.4)$$

Smykové napětí na mezi kluzu lze pomocí jednoosého normálového napětí na mezi kluzu vyjádřit jako [4]

$$\tau_0 = \frac{\sigma_0}{2} \quad (3.3.5)$$

kde τ_0 je mez kluzu ve smyku

σ_0 jednoosé normálové napětí na mezi kluzu



Obr. 3.3.1 Grafické znázornění Trescovy podmínky plasticity¹⁶

¹⁶ YU, M., MA, G., LI, J., *Structural Plasticity - Limit, Shakedown and Dynamic Plastic Analyses of Structures*, Zhejiang University Press, Hangzhou and Springer-Verlag, 2009, p. 34

Trescova podmínka je určena pro materiály, které mají stejnou mez pevnosti v tahu i tlaku (tzv. non-SD materiály) [9]. Tato podmínka je nezávislá na středním napětí (pressure insensitive) (3.3.6), proto je vhodná pro aplikaci na kovy, u kterých je vliv středního napětí (hydrostatické části daného stavu napětí) na plastické přetváření zanedbatelný [5].

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (3.3.6)$$

kde σ_m je střední napětí
 $\sigma_{1,2,3}$ hlavní napětí.

Von Misesova podmínka plasticity

Další podmínkou vhodnou pro popis plastického přetváření kovů je von Misesova podmínka plasticity. Byla formulována roku 1913 von Misesem [5] (také Huber, 1904, Hencky, 1925 [9]). Von Misesova podmínka plasticity vychází z předpokladu, že plastické přetváření nastane, pokud je dosaženo kritické hodnoty energie pružné deformace. Podmínka je vztažena k invariantu J_2 a je matematicky reprezentována rovnicí [4]

$$\sqrt{J_2} = \tau_0 \quad (3.3.7)$$

kde J_2 je invariant napětí
 τ_0 mez kluzu ve smyku.

Von Misesovu podmínku lze formulovat pomocí hlavních napětí [5]

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 6\tau_0^2 \quad (3.3.8)$$

nebo

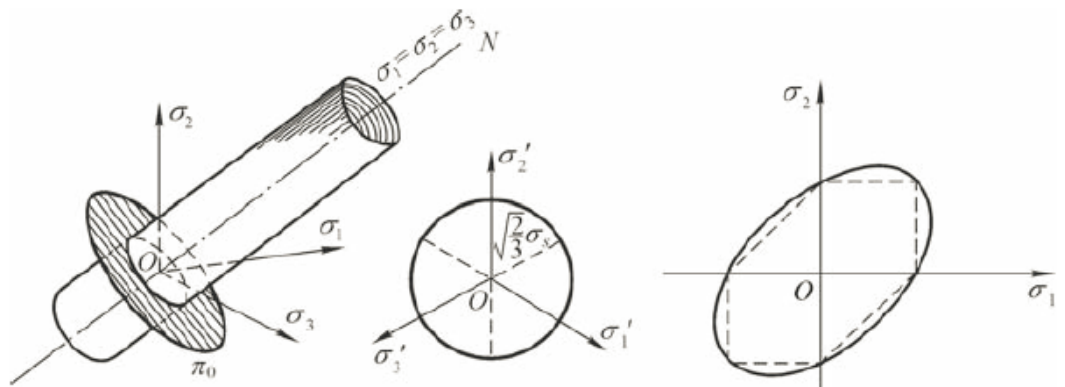
$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 - \sigma_1\sigma_2 = 3\tau_0^2 \quad (3.3.9)$$

kde $\sigma_{1,2,3}$ je hlavní napětí
 τ_0 mez kluzu ve smyku.

Smykové napětí na mezi kluzu lze pomocí normálového napětí na mezi kluzu (1D) vyjádřit jako [4]

$$\tau_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (3.3.10)$$

kde τ_0 je mez kluzu ve smyku
 σ_0 normálové napětí na mezi kluzu

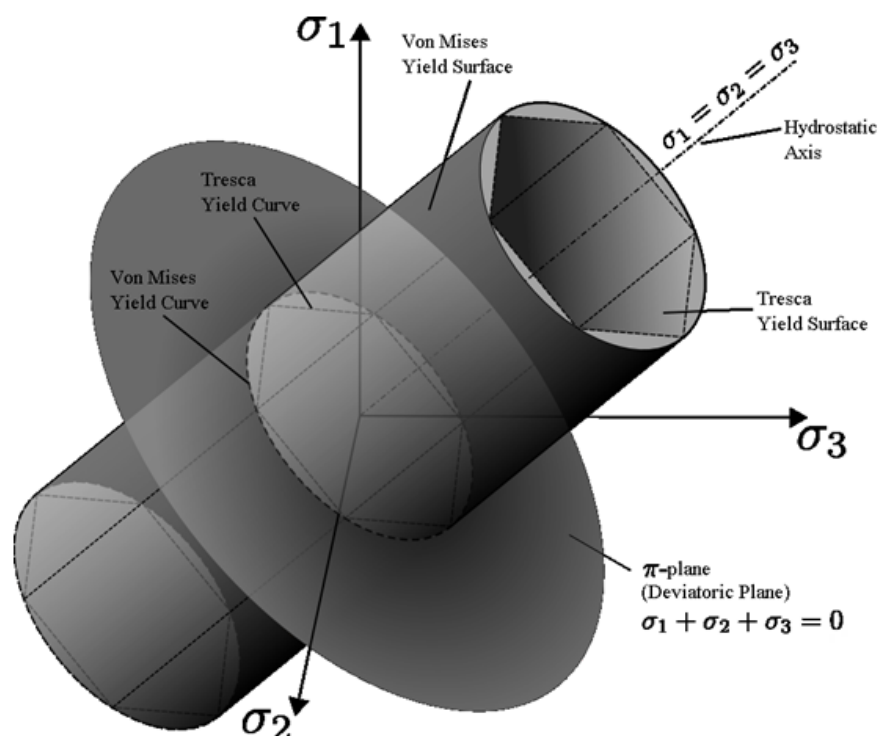


Obr. 3.3.2 Grafické znázornění von Misesovy podmínky plasticity¹⁷

Von Misesova podmínka plasticity je určena pro materiály se stejnou uvažovanou hodnotou meze pevnosti v tahu a tlaku (non-SD materiály). Tato podmínka nereflektuje vliv středního napětí (3.3.6) na porušení materiálu. [9]

Je možné se setkat s označením J_2 -plasticita pro teorie vycházející z von Misesova modelu plasticity. [4]

¹⁷ YU, M., MA, G., LI, J., *Structural Plasticity - Limit, Shakedown and Dynamic Plastic Analyses of Structures*, Zhejiang University Press, Hangzhou and Springer-Verlag, 2009, p. 38



Obr. 3.3.3 Grafické porovnání Trescovy a von Misesovy podmínky plasticity [38]

Mohr-Coulombova podmínka plasticity

Dle Bažanta¹⁸ je Mohr-Coulombova podmínka plasticity zobecněním Trescovy podmínky, které zohledňuje vliv středního napětí. Tato podmínka plasticity byla r. 1900 formulována Mohrem a vychází z Coloumbova zákona tření (1776)

$$\tau = c - \sigma \tan \varphi \quad (3.3.11)$$

kde τ je smykové napětí

c koheze

σ normálové napětí

φ úhel vnitřního tření

Zjednodušeně se dá říci, že plastické přetváření nastane, pokud normálové a smykové napětí dosáhnou kritické hodnoty.

Pomocí hlavních napětí lze Mohr-Coulombovo kritérium vyjádřit [2]

¹⁸ JIRÁSEK, M., BAŽANT, Z. P., *Inelastic Analysis of Structures*, John Wiley & Sons Ltd, 2002, 1st ed., p. 232

$$(\sigma_{max} - \sigma_{min}) + (\sigma_{max} + \sigma_{min})\sin\varphi = 2c \cos\varphi$$

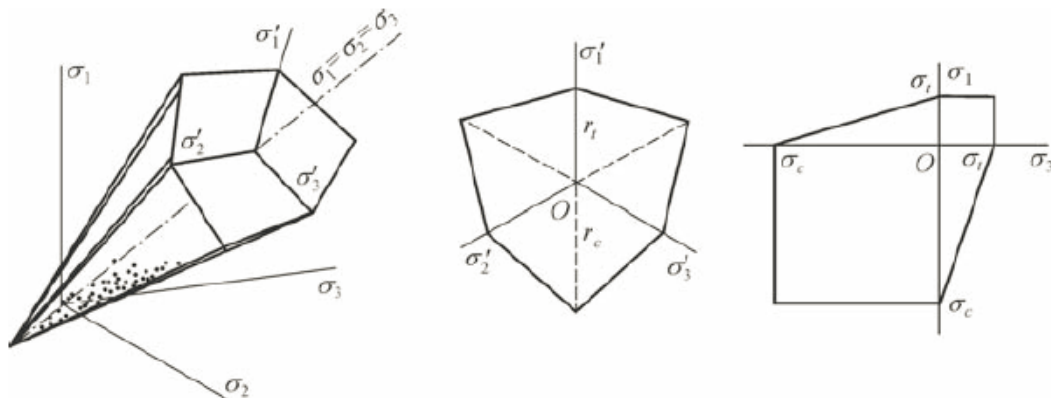
Za předpokladu, že platí nerovnost

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

lze psát kritérium ve tvaru

$$(\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3)\sin\varphi = 2c \cos\varphi$$

Mohr-Coulombova podmínka plasticity je určena pro materiály s vnitřním třením a rozdílnou uvažovanou hodnotou meze kluzu v tahu a tlaku (SD materiály). Nejčastěji se používá pro zeminy, horniny a betony. [2]



Obr. 3.3.4 Grafické znázornění Mohr-Coulombovy podmínky plasticity¹⁹

Drucker-Pragerova podmínka plasticity

Drucker-Pragerova podmínka byla formulována roku 1952. Dle Neta, Perice a Owense²⁰ se jedná o modifikaci Von Misesovy podmínky plasticity. Von Misesovo kritérium je rozšířeno o výraz, který zavádí vliv středního napětí na porušení materiálu (pressure sensitivity). [9] Drucker-Pragerova podmínka

¹⁹ YU, M., MA, G., LI, J., *Structural Plasticity - Limit, Shakedown and Dynamic Plastic Analyses of Structures*, Zhejiang University Press, Hangzhou and Springer-Verlag, 2009, p. 35

²⁰ NETO, E. S., PERIC, D., OWENS, D., *Computational methods for plasticity: theory and applications*, John Wiley & Sons Ltd, 2008, p. 166

plasticity je tedy závislá na prvním invariantu I_1 . Obvykle je vyjádřena ve tvaru [4]

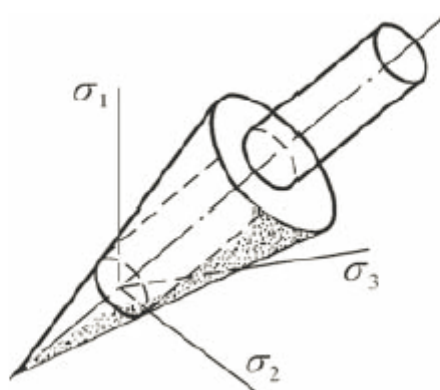
$$f(I_1, J_2) \equiv \alpha_m I_1 + \sqrt{J_2} - \tau_0 = 0 \quad (3.3.)$$

kde α_m je materiálový parametr

I_1 první invariant tenzoru napětí

J_2 druhý invariant tenzoru napětí

τ_0 mez kluzu ve smyku.

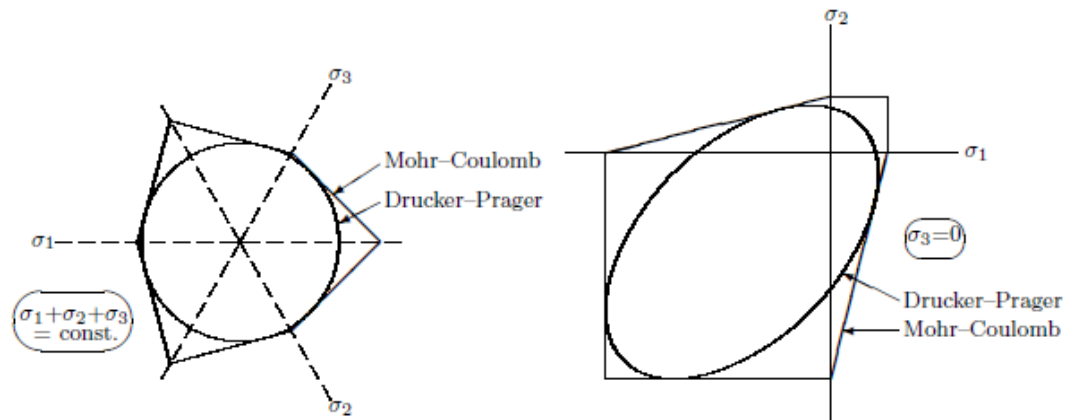


Obr. 3.3.5 Grafické znázornění Drucker-Pragerovy podmínky plasticity²¹

Drucker-Pragerova podmínka je určena pro materiály s vnitřním třením a rozdílnou uvažovanou hodnotou meze kluzu v tahu a tlaku (SD materiály). Mezi materiály, jejichž chování je možné popsat pomocí tohoto kritéria patří např. zeminy, horniny a betony. Yu, Ma a Li²² uvádějí některé kritiky Drucker-Pragerova kritéria, kteří poukázali na velmi špatnou aproximaci skutečného porušení modelovaných materiálů.

²¹ YU, M., MA, G., LI, J., *Structural Plasticity - Limit, Shakedown and Dynamic Plastic Analyses of Structures*, Zhejiang University Press, Hangzhou and Springer-Verlag, 2009, p. 39

²² Tamtéž, p. 39- 40



Obr. 3.3.6 Grafické porovnání Mohr-Coulombovy a Drucker-Pragerovy podmínky plasticity²³

²³ LUBLINER, J., *Plasticity Theory*, Dover Publications, 2008, p. 144

4 EXPLICITNÍ METODA

Pro přímou integraci pohybových rovnic je časová oblast rozdělena na konečný počet časových okamžiků $t_0, t_1 \dots t_n$, ve kterých je soustava pohybových rovnic (4.1) řešena. [22]

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (4.1)$$

kde \mathbf{M} je matice hmotnosti

\mathbf{C}	matice tlumení
\mathbf{K}	matice tuhosti
\mathbf{F}	zatěžovací vektor
\mathbf{u}	vektor posunutí
t	čas

Rozdíl (vzdálenost) mezi jednotlivými okamžiky se nazývá časový krok. Velikost časového kroku je stanovena dle vztahu 4.2 .

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} \quad (4.2)$$

Vzhledem k tomu, že řešíme pohybové rovnice pro každý uzel zvlášť, je nutné zajistit, aby v jednom časovém kroku vzruch způsobený posunutím jednoho uzlu nemohl ovlivnit rovnováhu sousedních uzlů. Stručně řečeno časový krok musí být tak malý, aby vlna ze kteréhokoliv uzlu nemohla dorazit do kteréhokoliv sousedního uzlu v daném časovém kroku. Toto je fyzikálně nutná podmínka k rozpadu soustavy rovnic na samostatné rovnice v každém uzlu zvlášť.

Pro systém pohybových rovnic musí být definovány počáteční podmínky $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ a $\dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{\mathbf{u}}_0$ [19]. Pro hledané řešení v čase t_i lze systém pohybových rovnic (4.1) přepsat ve formě [22]

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{K}\mathbf{u}_i = \mathbf{F}_i \quad (4.3)$$

kde $\ddot{\mathbf{u}}_i = \ddot{\mathbf{u}}(t_i)$

$\dot{\mathbf{u}}_i = \dot{\mathbf{u}}(t_i)$

$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}(t_i)$

$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}(t_i)$

Metody numerické integrace se dělí na implicitní a explicitní. [22]

Implicitní metoda se používá pro řešení pomalých dynamických jevů (řešení dominují nízké frekvence [8]). Posuvy v čase t_{i+1} se získávají z pohybové rovnice sestavené pro stejný časový okamžik. Pokud se z pohybové rovnice vyjme matice

hmotnosti, lze implicitním algoritmem (v případě zanedbatelných setrvačných sil) řešit statické úlohy. Implicitní metoda je nepodmíněně stabilní (stabilita nezávisí na velikosti časového kroku). U implicitních algoritmů je snaha aplikovat co nejdelší časový krok, ovšem je nutné si uvědomit, že na rozdíl od stability, přesnost na volbě velikosti časového kroku závisí. [23]

Explicitní metoda je vhodná pro řešení rychlých dynamických dějů (řešení dominují vysoké frekvence a šokové vlny [8]) a materiálově i geometricky silně nelineárních úloh jako jsou nárazy, exploze, průstřely, simulace technologických procesů jako např. stříhání a obrábění kovů apod. Na rozdíl od implicitní metody lze explicitní metodou úspěšně řešit rozsáhlé a velmi komplexní úlohy s komplikovanou topologií. [23] Posuvy v čase t_{i+1} se získávají z pohybové rovnice sestavené v čase t_i . Explicitní metoda je podmíněně stabilní.

Statické rovnováhy systému lze nejrychleji dosáhnout aplikací kritického útlumu. Explicitní metoda v této podobě je známa pod názvem dynamická relaxace. Dynamická relaxace hledá řešení lineárních nebo nelineárních statických úloh jako ustálený stav pseudo-dynamického problému [29]. Hmota a útlum v tomto řešení nemusí být reálné, ale mohou být vhodně zvoleny tak, aby bylo co nejrychleji dosaženo ustáleného stavu. Zatížení a tuhosti musí být reálné. Dynamická relaxace je vhodná především pro řešení citlivých (špatně podmíněných) materiálově i geometricky nelineárních úloh. Často se využívá pro hledání tvaru membránových nebo lanových konstrukcí (form finding).

Vývoj explicitní metody začal na vědeckých pracovištích a univerzitách v USA v šedesátých letech dvacátého století. [24] Mezi prvními publikoval na téma explicitní metoda konečných prvků v r. 1964 Wilkins. Ve stejném roce byl vytvořen první software využívající tuto metodu. Nejprve vznikaly otevřené univerzitní kódy následované komerčními softwary, jejichž největší boom přišel v osmdesátých letech. První na trhu se objevil PAMCRASH. Mezi další nejrozšířenější řešiče patří ABAQUS-explicit a LS-DYNA, která byla komercializována na konci 80. let. [25]

4.1 Metoda centrálních diferencí

V diferenčních metodách jsou hodnoty derivací nahrazovány diferencemi. Metoda centrálních diferencí, která patří ve výpočtové mechanice mezi nejoblíbenější explicitní integrační schémata, byla vyvinuta z předpisu centrální difference pro rychlost a zrychlení. [3] První a druhá derivace posunutí (rychlost a zrychlení) je nahrazena aproximací centrální difference dle 4.1.1. [25] [22]

$$\dot{u}_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t} \quad \dot{u}_{i+1/2} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_i = \frac{\dot{\mathbf{u}}_{i+1/2} - \dot{\mathbf{u}}_{i-1/2}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{u}_{i+1} - 2\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{i-1}}{\Delta t^2} \quad (4.1.1)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{i+1/2} = \dot{\mathbf{u}}_{i-1/2} + \ddot{\mathbf{u}}_i \Delta t$$

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \dot{\mathbf{u}}_{i+1/2} \Delta t \quad (4.1.2)$$

kde \mathbf{u} je vektor posunutí

$\dot{\mathbf{u}}$ vektor rychlosti

$\ddot{\mathbf{u}}$ vektor zrychlení

Δt časový krok (uvažuje se konstantní velikost)

Po dosazení vztahů pro rychlost a zrychlení (4.1.1) do pohybových rovnic (4.3) dostaneme vztah 4.1.3, ze kterého lze spočítat posunutí \mathbf{u}_{i+1} [22].

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{F}_i - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{u}_i - \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{u}_{i-1} \quad (4.1.3)$$

kde \mathbf{M} je matice hmotnosti

\mathbf{C} matice tlumení

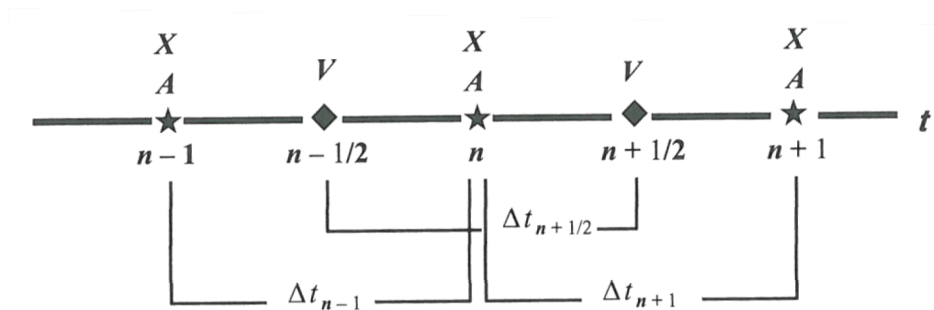
\mathbf{K} matice tuhosti

\mathbf{F} zatěžovací vektor

\mathbf{u} vektor posunutí

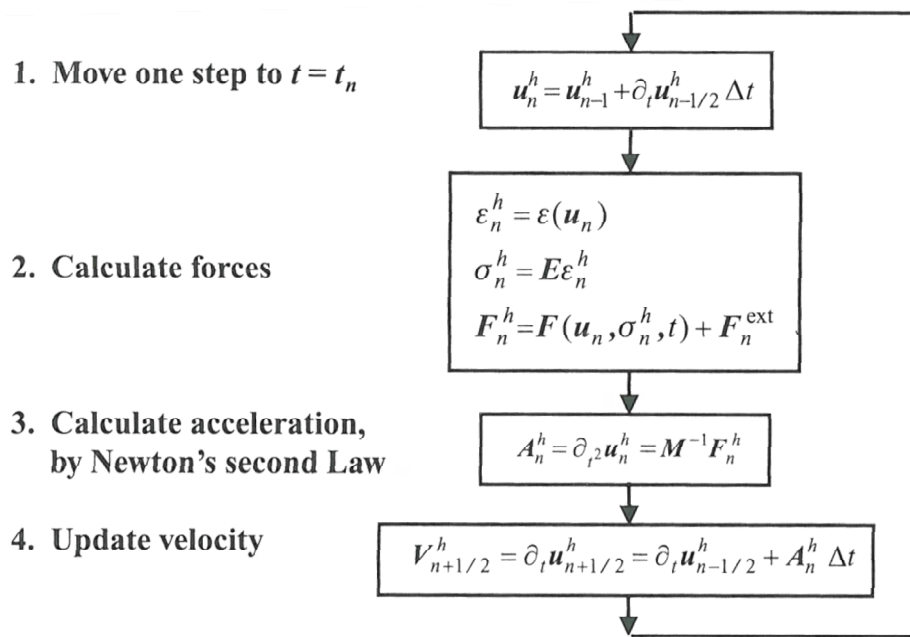
Δt časový krok

Použití této metody je výhodné, pokud je matice tlumení $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ nebo $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M}$. Největší efektivity je dosaženo, pokud je matice hmotnosti \mathbf{M} diagonální. [22] V takovém případě se soustava rovnic rozpadne na samostatné rovnice. Řešení jednoho kroku explicitní metody je tak několika násobně rychlejší než řešení analogického kroku implicitní metody. [23]



Obr. 4.1.1 Kroky (události) časové integrace²⁴

²⁴ WU, S. R., GU, L., *Introduction to the Explicit Finite Element Method for Nonlinear Transient Dynamics*, John Wiley & Sons, Inc., 2012, p. 20



Obr. 4.1.2 Příklad procedury explicitní metody konečných prvků (elastický materiál)²⁵

4.2 Stabilita

Na rozdíl od implicitní metody časové integrace je explicitní metoda podmíněně stabilní. To znamená, že je nutné splnit podmínku stability (4.2.1) pro velikost časového kroku (při volbě příliš velkého časového kroku výsledky rostou nade všechny meze a dochází ke zhroucení výpočtu).

$$\Delta t < \Delta t_{crit} \quad (4.2.1)$$

kde Δt_{crit} je kritický časový krok
 Δt časový krok

Jak je uvedeno v [25] Flanagan a Belytschko ukázali, že

$$\omega_{max}^{sys} \leq \omega_{max}^{ele}$$

a tedy

$$\Delta t_{min}^{ele} \leq \Delta t_{crit}$$

kde ω_{max}^{sys} je maximální vlastní frekvence systému

²⁵ Tamtéž, p. 21

ω_{max}^{ele} maximální vlastní frekvence elementu

Δt_{min}^{ele} nejmenší časový krok zjištěný na elementu

Není tedy nezbytně nutné hledat nejvyšší vlastní frekvenci celého systému a lze použít nejvyšší vlastní prvku respektive nejmenší časový krok stanovený pro prvek. Podmínka stability tak bude konzervativně splněna. [25]

Pro nosník (beam a truss element) lze v literatuře pro výpočet kritického časového kroku nalézt následující tři vztahy

$$\Delta t_{crit} = \frac{2}{\omega} \quad [22], [25] \quad (4.2.2)$$

$$\Delta t_{crit} = \frac{l}{c} \quad [3], [26] \quad (4.2.3)$$

$$\Delta t_{crit} = \delta \frac{l}{c} \quad [8]$$

kde ω je vlastní frekvence prvku

l charakteristický rozměr prvku (délka prvku)

c rychlost šíření zvukové vlny v materiálu

δ redukční součinitel zohledňující nelinearity

$$0,2 < \delta < 0,9$$

Vztah mezi vlastní frekvencí a rychlostí podélné vlny je dle [24] a [25]

$$\omega = \frac{2c}{l} \quad (4.2.4)$$

Z rovnice 4.2.4 vyplývá ekvivalence vzorců 4.2.2 a 4.2.3 pro stanovení velikosti kritického časového kroku.

Rychlost šíření podélné zvukové vlny v materiálu je dána [26]

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (4.2.5)$$

kde E je modul pružnosti materiálu

ρ hustota materiálu

Po dosazení 4.2.5 do 4.2.2 respektive 4.2.3 dostaneme rovnici 4.2.6, ze které je patrné, že velikost časového kroku je v případě podélného vlnění přímo úměrná velikosti (délce) prvku a druhé odmocnině hustoty materiálu a je nepřímo úměrná druhé odmocnině modulu pružnosti materiálu.

$$\Delta t_{crit} = \frac{2}{\omega} = l \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (4.2.6)$$

Velikost kritického časového kroku je v případě příčného vlnění určena vztahem (Belytschko, Tsay, 1982)

$$\Delta t_{crit} = \frac{0,5L}{c \sqrt{3I \left(\frac{3}{12I + AL^2} + \frac{1}{AL^2} \right)}} \quad (4.2.7)$$

kde c je rychlost šíření zvukové vlny v materiálu

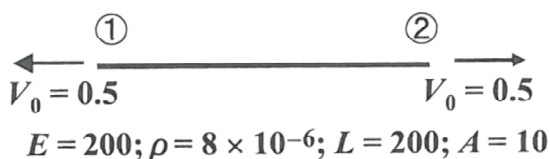
L délka

I maximální hodnota momentu setrvačnosti

A maximální hodnota plochy příčného řezu

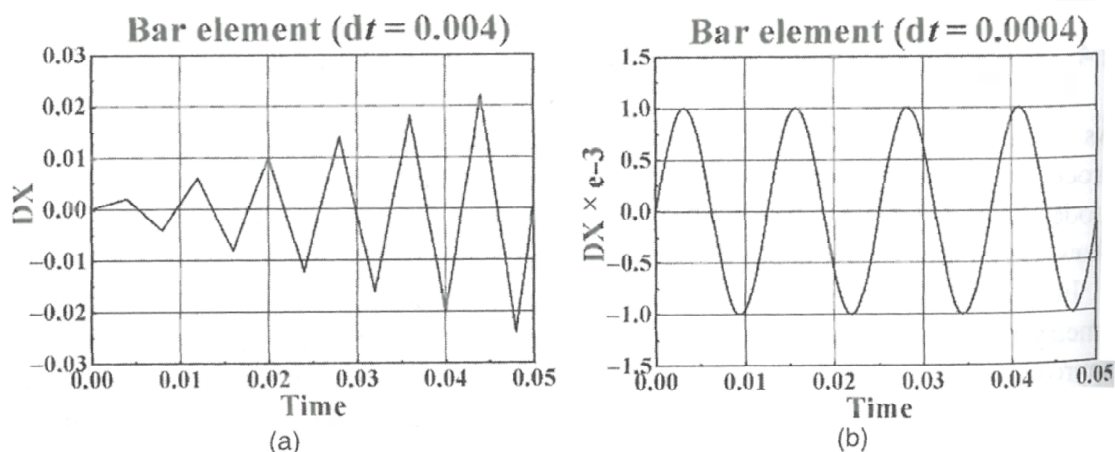
Wu a Gu²⁵ demonstrují aplikaci výše uvedených vztahů na konkrétním příkladu prvku zobrazeném na obr. 4.2.1. Oběma uzlům prvku je přiřazena počáteční rychlost v_0 v opačném směru (viz obr. 4.2.1). Velikost kritického časového kroku je vyčíslena pro daný element $\Delta t_{crit} = 0,004$ s. Na obr. 4.2.2 jsou uvedeny hodnoty posunu uzlu 2 v závislosti na čase pro řešení s časovým krokem $\Delta t = \Delta t_{crit} = 0,004$ s (4.2.2a) a pro desetinný časový krok $\Delta t = 0,0004$ s (4.2.2b). Varianta (a) nesplňuje podmínku stability a systém rychle diverguje. Varianta (b) se ovšem již velmi blíží přesnému řešení.

Je ukázáno, že kritický časový krok je určen pouze pro kontrolu stability. V případech, kdy je nutné zajistit větší přesnost, je třeba zvolit menší časový krok.



Obr. 4.2.1 Nosníkový prvek²⁶

²⁶ WU, S. R., GU, L., *Introduction to the Explicit Finite Element Method for Nonlinear Transient Dynamics*, John Wiley & Sons, Inc., 2012, p. 22



Obr. 4.2.2 Vliv velikosti časového kroku na stabilitu a přesnost²⁷

4.3 Diagonální matice hmotnosti

Z inženýrského pohledu představuje diagonální matice hmotnosti diskretizovanou hmotu, která je soustředěna do uzlů. Pokud je matice hmotnosti diagonální, rozpadne se systém pohybových rovnic na samostatné rovnice. Použití diagonální matice hmotnosti je volitelné pro implicitní metodu, ale je zcela zásadní pro explicitní metodu konečných prvků používanou pro analýzu transientních dynamických úloh. Bez něj, by explicitní metoda ztratila svou efektivitu a tím pravděpodobně i oblibu. [25] Pokud je ale konzistentní matice hmotnosti použita s centrální diferenční metodou, jedná se sice stále o explicitní metodu, ovšem takové použití je velmi vzácné, protože explicitní schéma, které zahrnuje řešení soustavy rovnic nepřináší žádné benefity²⁸.

²⁷ WU, S. R., GU, L., *Introduction to the Explicit Finite Element Method for Nonlinear Transient Dynamics*, John Wiley & Sons, Inc., 2012, p. 22

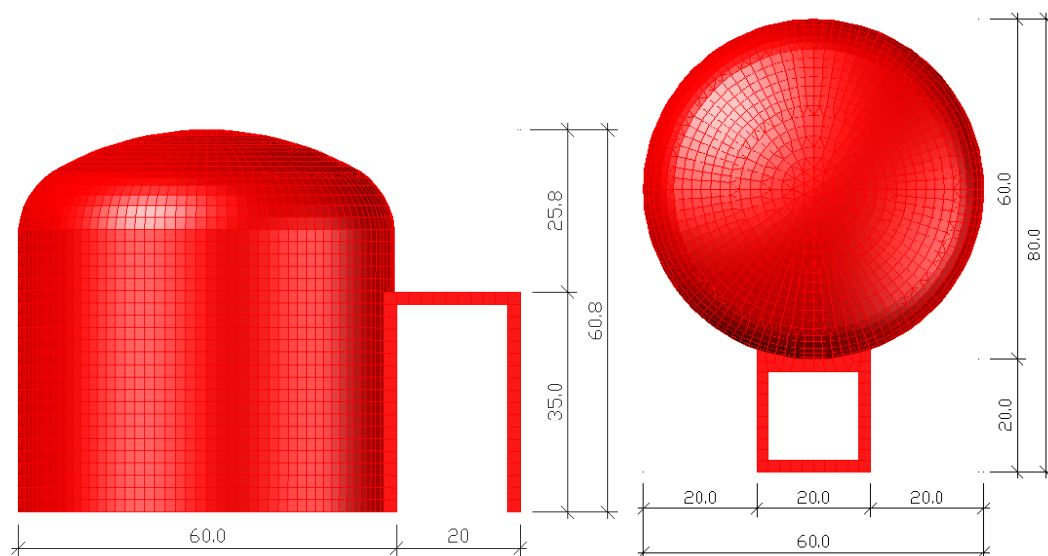
²⁸ BELYTSCHKO, T., LIU, W. K., MORAN, B., *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley & Sons Ltd., 2000, p. 299

5 ŘEŠENÁ ÚLOHA

Byla provedena numerická simulace nárazu letadla do konstrukce kontejnmentu jaderné elektrárny. Cílem úlohy bylo ověřit teoretické poznatky týkající se analýzy rychlých dynamických dějů (především nárazů) řešených přímou integrací pohybových rovnic explicitní metodou a stanovení velikosti trvalých deformací a rozsahu plastických přetvoření kontejnmentu způsobených nárazem dopravního letadla.

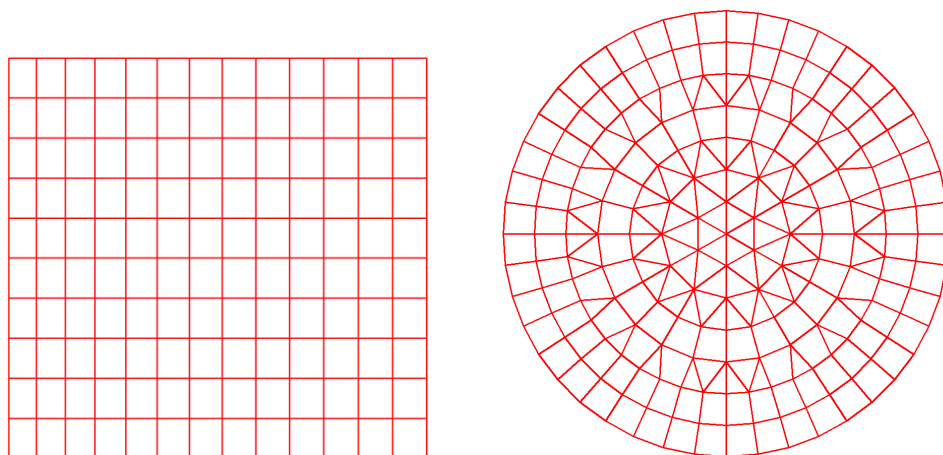
5.1 Model kontejnmentu

Tvar a velikost budovy kontejnmentu byla odvozena od kontejnmentu, který je součástí jaderné elektrárny Bushehr v Íránu. Tvar a rozměry modelu jsou patrné z obr. 5.1.1.



Obr. 5.1.1 Tvar a rozměry kontejnmentu

Válcová část modelu kontejnmentu (stěna) je pokryta pravidelnou sítí tvořenou čtyřúhelníkovými skořepinovými prvky. Zastřešení konstrukce je pokryto sítí z trojúhelníkových a čtyřúhelníkových skořepinových prvků. Vzhledem k tomu, že na rozdíl od deformací letadla nebudou deformace kontejnmentu tak velké, nedojde k podstatné deplanaci čtyřúhelníkových prvků na deformované konstrukci a tudíž není nutné požadovat trojúhelníkovou síť. Čtyřúhelníková síť totiž obecně dává lepší výsledky než trojúhelníková. Detail sítě konečných prvků, které pokrývají stěnu modelu kontejnmentu je uveden na obr. 5.1.2 vlevo. V pravé části tohoto obrázku je detail sítě, která pokrývá okolí středu zastřešení kontejnmentu.



Obr. 5.1.2 Detail sítě konečných prvků

Studie byla zaměřena na dva typy materiálově odlišných konstrukcí a to železobetonové a ocelové. U ocelových kontejnmentů byla použita vysokopevnostní konstrukční ocel s mezí kluzu 500 MPa a von Misesova podmínka plasticity. Co se týče železobetonových konstrukcí, byl zaveden fiktivní materiál, který reprezentuje beton s "rozpuštěnou" betonářskou výztuží. Z důvodu nedostupnosti projektové dokumentace a příliš velké pracnosti nebylo možné modelovat jednotlivé pruty výztuže. Lepším řešením by mohlo být zavedení tzv. rozmazané výztuže pomocí vrstevnatého prvku. V takovém případě by se výztuž v jedné vrstvě (se stejnou vzdáleností od líce konstrukce) nahradila souvislou vrstvou oceli (rozmazané výztuže) s danou tloušťkou tak, aby plocha této vrstvy odpovídala ploše jednotlivých prutů výztuže. Tuto možnost nabízí např. ATENA nebo ABAQUS. V programu RFEM, ve kterém byla úloha řešena, je tato možnost připravena, ale zatím ještě nebyla pro uživatele uvolněna. Byl proto zvolen přístup zavádějící fiktivní materiál. Mez kluzu tohoto materiálu byla určena tak, aby při zatížení návrhovým přetlakem 0,43 MPa nedošlo k plastickým deformacím. Hodnota návrhového přetlaku byla vyhledána v odborné literatuře [30] pro daný typ kontejnmentu (large dry PWR). Výchozími materiály byla ocel B500 s modulem pružnosti 200 GPa a beton C35/45 s modulem pružnosti 34 GPa. Modul pružnosti fiktivního materiálu byl stanoven:

$$\frac{E_b \cdot (100 - \rho) + E_o \cdot \rho}{100} = \frac{34 \cdot (100 - 4) + 200 \cdot 4}{100} = 39,96 \text{ MPa} \quad (5.1.1)$$

kde E_b je modul pružnosti betonu

E_o modul pružnosti oceli

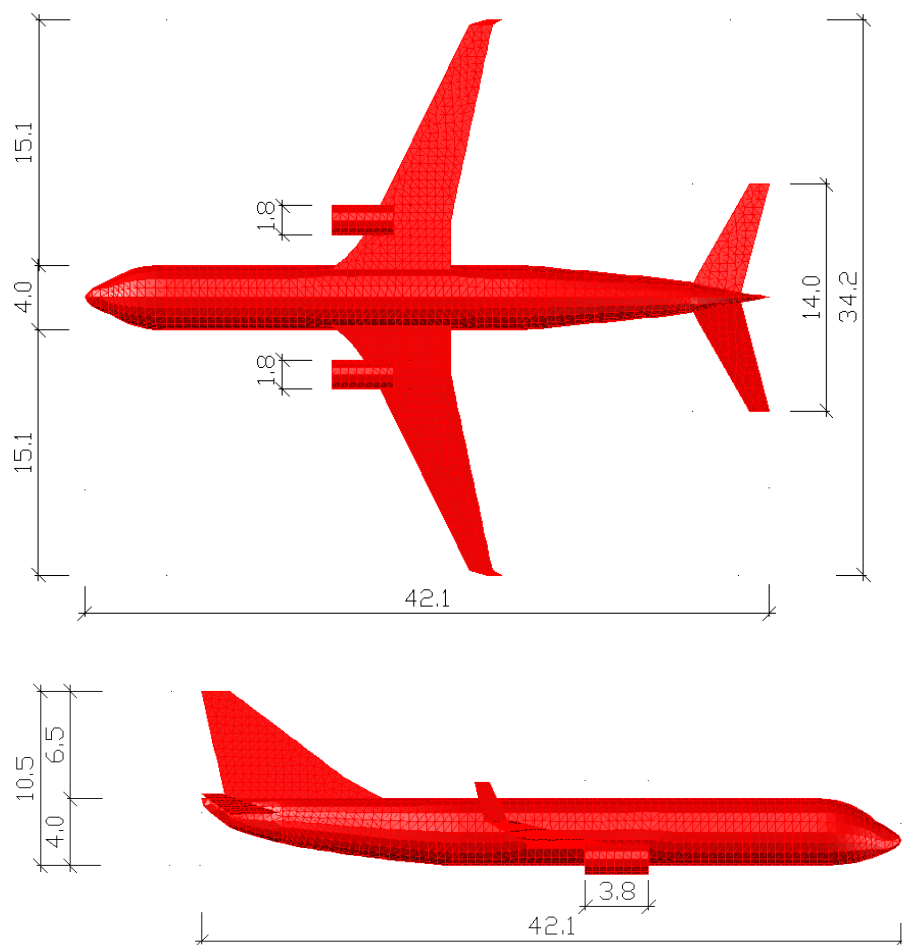
ρ stupeň vyztužení v procentech

5.2 Model letadla

Předlohou pro model letadla byl Boeing 737. Parametry modelu byly zvoleny tak, aby odpovídaly specifikacím uvedeným v [31]. Rozměry letadla jsou patrné z obr. 5.2.1. Hmotnost letadla byla uvažována hodnotou 50 t. Rychlost letadla v okamžiku nárazu byla odhadnuta na 500 km/h. Model byl pokryt trojúhelníkovou sítí. Čtyřúhelníky se na tomto modelu neosvědčily, protože docházelo k jejich deplanaci způsobené velkými deformacemi a rotacemi pláště letadla. Průměrná velikost prvku byla zvolena 0,25 m. V programu RFEM uživatel zadává velikost prvku, eventuálně zahuštění sítě, pouze jako parametry pro generátor sítě. Hustota a zahuštění sítě je tedy v tomto pojetí pouze parametrem výpočtu. Na rozdíl od řady jiných komerčních softwarů tak úplně odpadají problémy spojené s tvorbou sítě.



Obr. 5.2.1 Model letadla



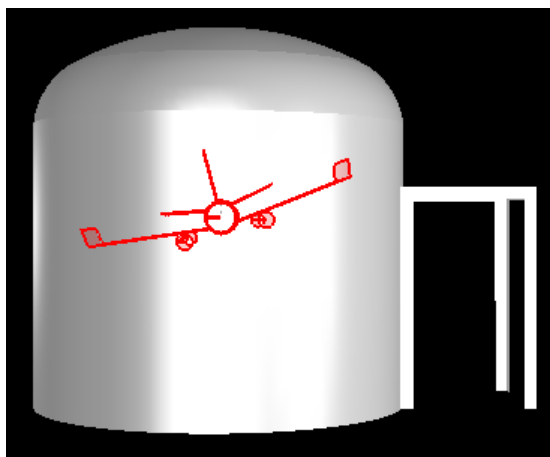
Obr. 5.2.1 Rozměry modelu letadla

5.3 Koncepce řešení

Studie nárazu byla rozdělena do dvou fází, ve kterých vystupují oba modely samostatně, protože RFEM neumožňuje řešení dynamických kontaktních úloh v plné obecnosti. Nejprve byla provedena analýza nárazu letadla do tuhé stěny. Na jejím základě byla určena velikost zatížení (kontejnmentu) a následně byla provedena výsledná analýza kontejnmentu.

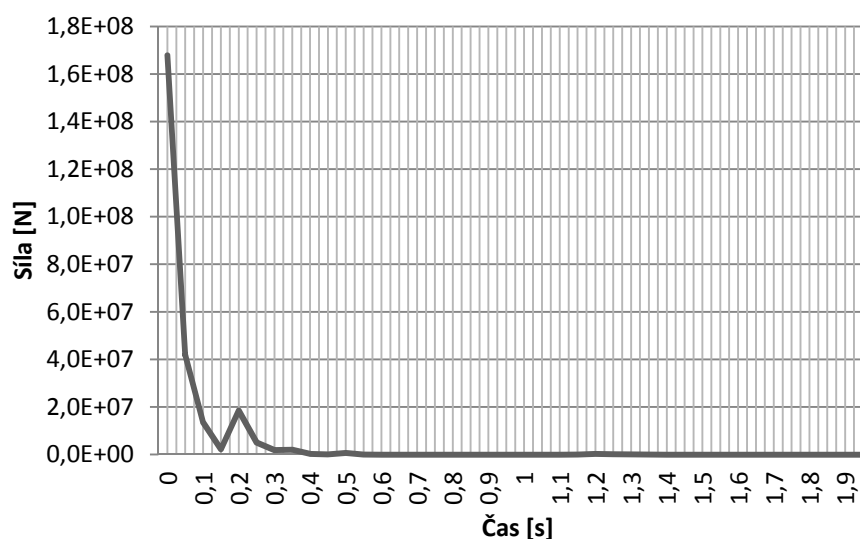
5.4 Zatížení kontejnmentu

Konstrukce kontejnmentu byla zatížena liniovým a plošným zatížením podle průřezu letadla na plášť kontejnmentu ve směru letu (viz obr. 5.3.1).



Obr. 5.3.1 Průřez letadla na plášť kontejnmentu ve směru letu

Pro účely stanovení velikosti zatížení byl sestaven graf 5.3.1, který zobrazuje závislost velikosti součtu uzlových reakcí po nárazu letadla do tuhé stěny na čase.



Graf 5.3.1 Časová závislost velikosti celkové síly působící na kontejnment

Z tohoto grafu byla stanovena doba trvání zatížení $\Delta t_z = 0,1 \text{ s}$. Celková zatěžovací síla byla určena ze vztahu 5.3.1 pro výpočet impulsu síly (změny hybnosti)

$$F \Delta t_z = m \Delta v \quad (5.3.1)$$

kde F je konstantní síla

Δt_z doba trvání zatížení

m hmotnost

Δv změna rychlosti

Celková zatěžovací síla:

$$F = \frac{m\Delta v}{\Delta t_z} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot \frac{500}{3.6}}{0,1} = 6,944 \cdot 10^7 \text{ N} \quad (5.3.2)$$

Tato síla byla rozdělena odhadem mezi jednotlivé části letadla:

- 50 % trup
- 30 % motory
- 20 % křídla

Přepočet celkové hodnoty zatížení (síly) na liniová respektive plošná zatížení byl proveden následovně:

- trup:
plošné kruhové zatížení

$$p_1 = \frac{0,5F}{\pi r^2} = \frac{0,5 \cdot 6,944 \cdot 10^7}{\pi \cdot 2^2} = 2,763 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 \quad (5.3.3)$$

- motory:
plošné kruhové zatížení

$$p_2 = 0,5 \frac{0,3F}{\pi r^2} = 0,5 \frac{0,3 \cdot 6,944 \cdot 10^7}{\pi \cdot 0,9^2} = 4,093 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 \quad (5.3.4)$$

- křídla:
liniové zatížení

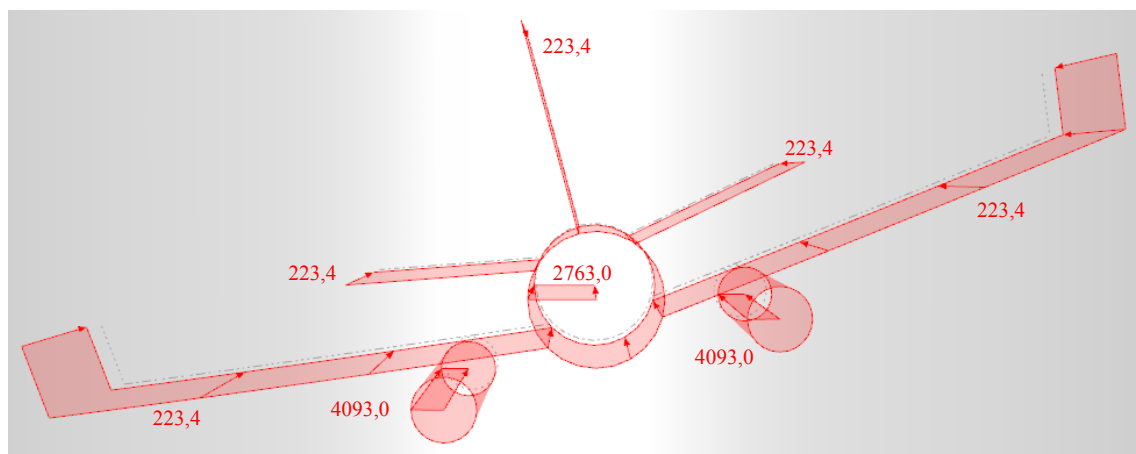
$$p_3 = \frac{0,2F}{l} = \frac{0,2 \cdot 6,944 \cdot 10^7}{62,1624} = 2,234 \cdot 10^5 \text{ N/m} \quad (5.3.5)$$

kde F je celková zatěžovací síla

r poloměr

l součet délek průmětů všech křídel (směrovek)

Výsledné hodnoty v kN/m respektive v kN/m^2 a rozložení zatížení je patrné z obr. 5.3.2. Doba působení tohoto zatížení byla, jak již bylo zmíněno výše, 0,1 s.

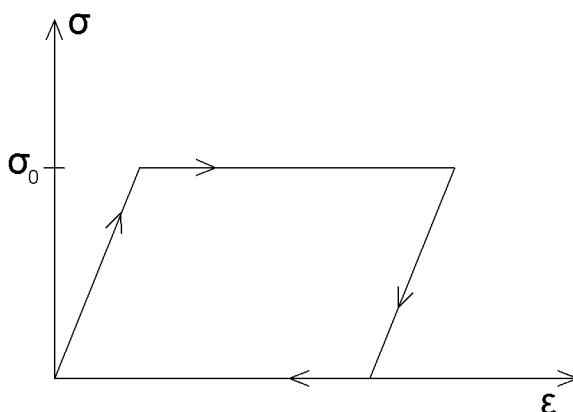


Obr. 5.3.2 Zatížení kontejnmentu nárazem letadla

5.5 Numerické řešení

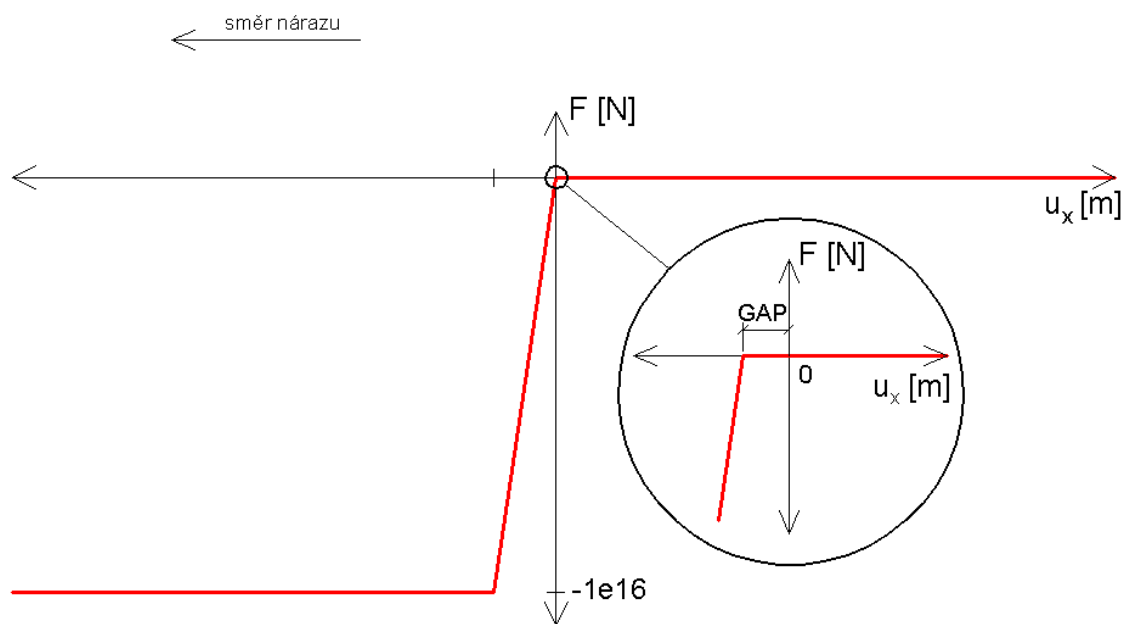
Řešení úlohy bylo provedeno explicitní metodou konečných prvků popsanou v předchozí kapitole (kap. 4) této práce. V následujícím textu budou uvedeny parametry výpočtu pro oba modely.

Výpočet nárazu letadla do tuhé stěny je pomocný a byl proto řešen zjednodušeně jako lineární (bez materiálové nelinearity modelu letadla). Výpočet explicitní metodou s materiálovou nelinearitou je totiž časově podstatně náročnější, protože v každém kroku musí výpočet vstoupit do podprogramu pro materiálovou nelinearitu. Pro tak rozsáhlou úlohu s materiálovou nelinearitou, jako je tato, byl výpočtový čas již neúnosně dlouhý. Disipace energie při zplastizování byla v numerickém řešení realizována speciální úpravou programu. Tato úprava spočívala ve využití jednoduchého ideálního pružno-plastického pracovního diagramu uvedeného na obr. 5.5.1. Úloha byla řešena s časovým krokem o velikosti $1e-6$ s. Vliv velikosti časového kroku na nestabilitu výpočtu je diskutován v následující kapitole (kap. 5.6).



Obr. 5.5.1 Ideální pružno-plastický pracovní diagram

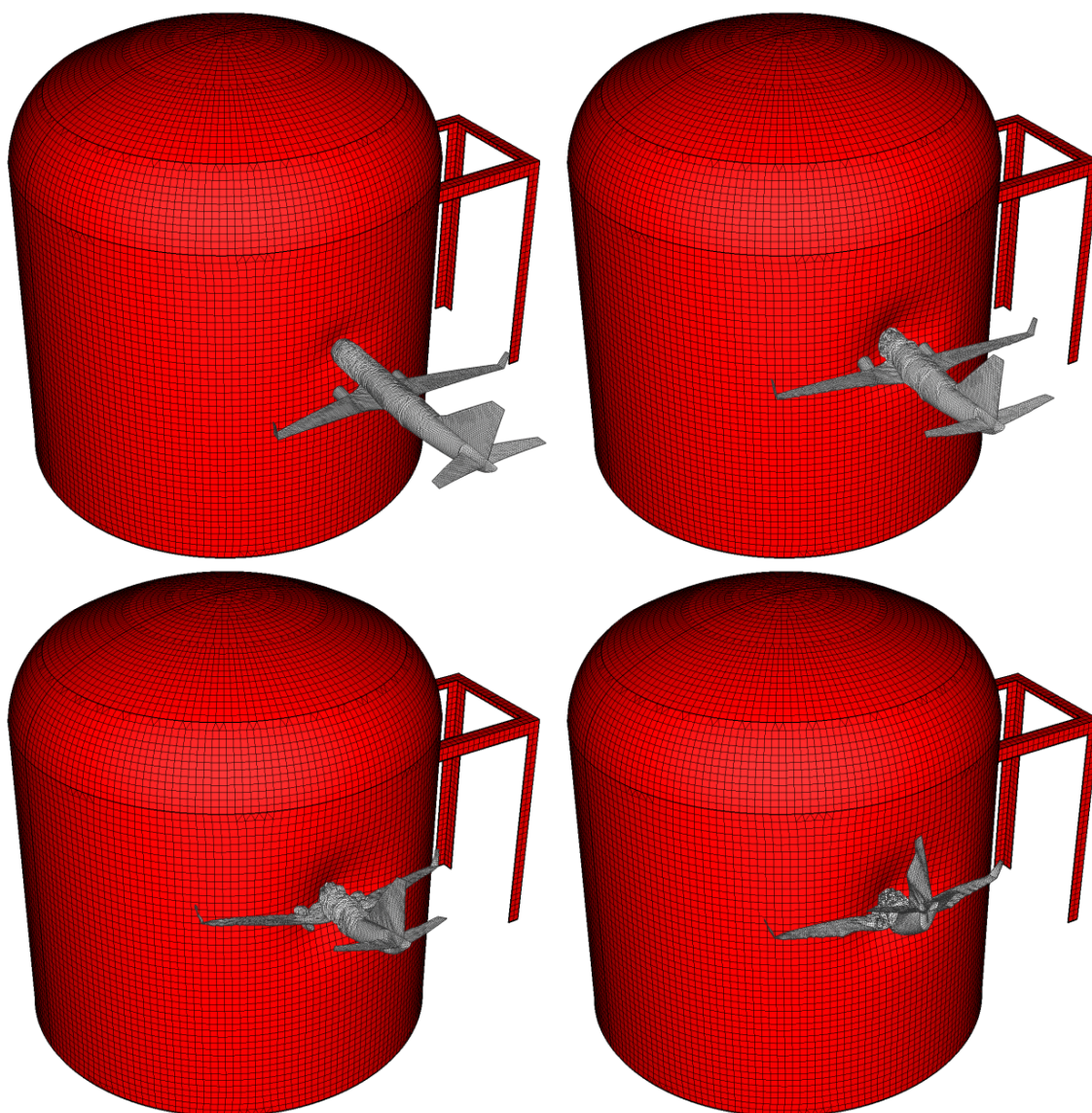
Tuhá stěna byla modelována pomocí podpor s gapem, které byly vygenerovány pro každý uzel speciálně vytvořeným programem. Velikost gapu, která reprezentuje vzdálenost konkrétního uzlu od překážky, byla dopočtena pro každý uzel zvlášť. Příklad pracovního diagramu podpory s gapem je uveden na obr. 5.5.2.



Obr. 5.5.2 Pracovní diagram podpory s gapem

Odezva železobetonového kontejnmentu byla řešena s časovým krokem $5e-5$ s a součinitelem tlumení $\alpha = 3.0 \text{ s}^{-1}$. Odezva ocelového kontejnmentu byla s ohledem na vyšší rychlost zvuku v oceli řešena s časovým krokem $1e-5$ s a součinitelem tlumení $\alpha = 0.1 \text{ s}^{-1}$. Velikost a vliv tlumení jsou diskutovány v kapitole 5.7 této práce.

Na obr. 5.5.3 jsou zobrazeny fáze nárazu letadla do kontejnmentu v čase 0.05 s, 0.13 s, 0.25 s a 0.6 s. Obrázek je pouze ilustrativního charakteru a vznikl složením grafických výstupů obou výpočtů. Zdeformované modely jsou ve stejném měřítku.



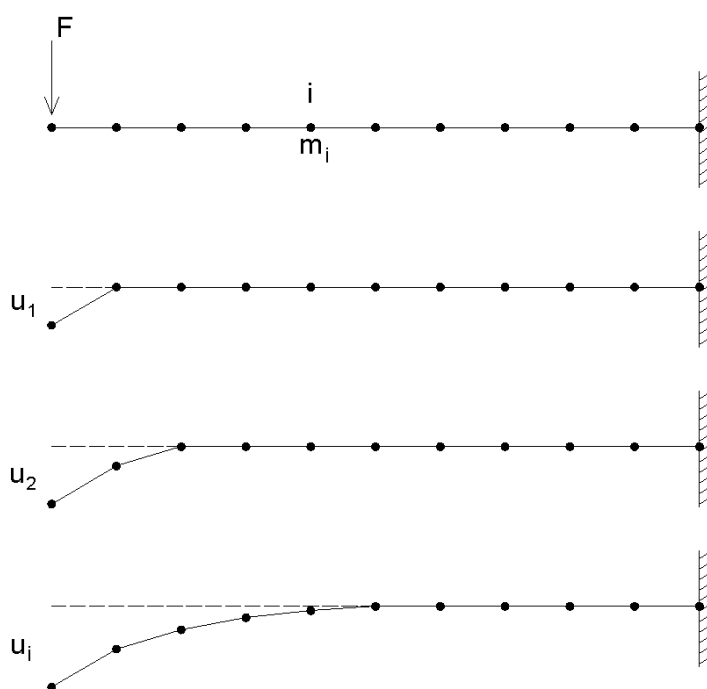
Obr. 5.5.3 Průběh nárazu letadla do konstrukce kontejneru v čase 0.05 s, 0.13 s, 0.25 s a 0.6 s

5.6 Vliv velikosti časového kroku na stabilitu

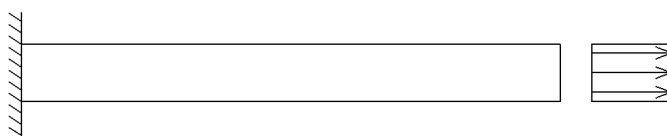
Pro numerický výpočet konstrukce explicitní metodou je mimořádně důležité stanovit vhodnou velikost časového kroku. Menší časový krok vede k enormnímu nárůstu výpočtového času, naopak větší časový krok může vést k nestabilitě výpočtu. V následujících odstavcích bude vznik nestabilit podrobněji rozebrán.

Při řešení příkladu uvedeném na obr. 5.6.1 explicitní metodou, lze v prvním kroku získat posunutí prvního uzlu u_1 ostatní uzly budou mít v prvním kroku posunutí nulové, protože na ně nepůsobí žádná síla. Ve druhém kroku se již zohlední vliv napjatosti prvního prvku na druhý uzel, který způsobí jeho posunutí u_2 . Proces pokračuje podobně i v dalších krocích s tím, že v každém kroku se může deformace šířit

jenom o jeden prvek. Reálné šíření vlny je však dáno rychlostí zvuku v materiálu. Velikost časového kroku musí být vždy taková, aby reálné šíření vzruchu bylo algoritmem umožněno a nedošlo k rozporu s fyzikální podstatou řešeného problému. To znamená, např. při řešení podélného vlnění pásku z obr. 5.6.2 způsobeného tahovou silou, že rychlost, kterou se šíří podélná vlna, musí být numericky umožněna. Zjednodušeně řečeno, nesmí tedy nastat stav, kdy reálná vlna "předběhne" možnosti numerického řešení.



Obr. 5.6.1 Šíření vzruchu v explicitní metodě v časových krocích

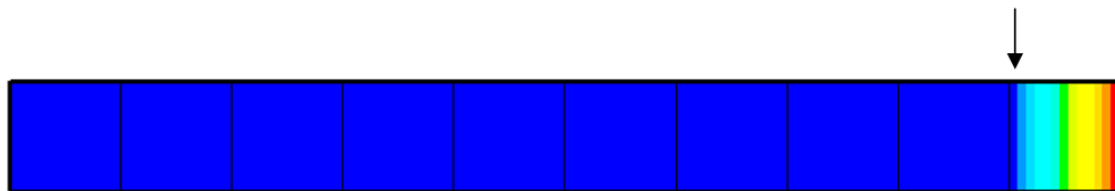


Obr. 5.6.2 Podélné vlnění pásku

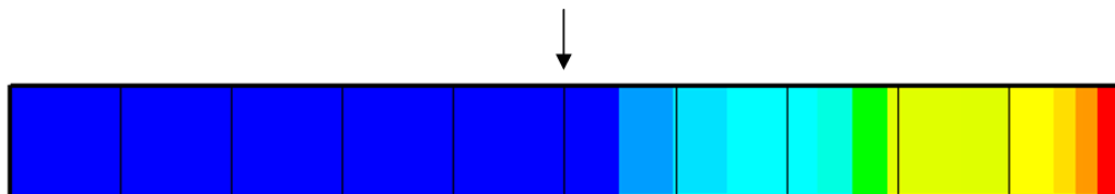
Na obr. 5.6.3 je zobrazeno podélné vlnění pásku řešené s krokem $8e-3$ s. Šipky znázorňují možnost algoritmu k šíření vzruchu a barevně je zobrazeno šíření reálné podélné vlny (posun v podélném směru), přičemž tmavě modrá barva představuje nulové posuny. Je patrné, že tato velikost kroku byla dostatečná při řešení vlnění v jednom směru (rychlost vlnění je v takovém případě závislá na modulu pružnosti a hustotě materiálu a lze ji snadno vyčíslit). Jakmile ale vlna dorazila na konec pásku a odrazila se, došlo k interferenci vlnění a výpočet zkolaboval v 59. kroku. Ukázalo se, že při stanovení časového kroku je nutné uvažovat určitou bezpečnost a časový krok určený z rychlosti šíření zvuku v konstrukci zmenšit vhodným součinitelem.

Interference vlnění a stav modelu před kolapsem výpočtu jsou uvedeny na obr. 5.6.4. Na tomto obrázku je také vidět počáteční stav vzniku nestability. Nechtěné příčné "rozkmitání" se pak rychle zvětšuje a skončí zhroucením výpočtu.

1.krok (0.008 s)



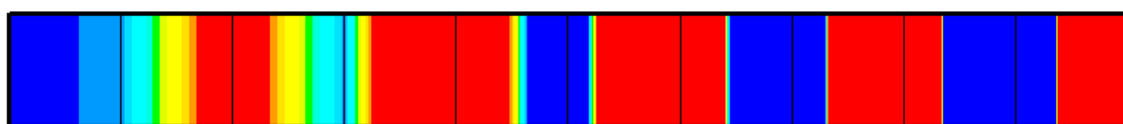
5.krok (0.04 s)



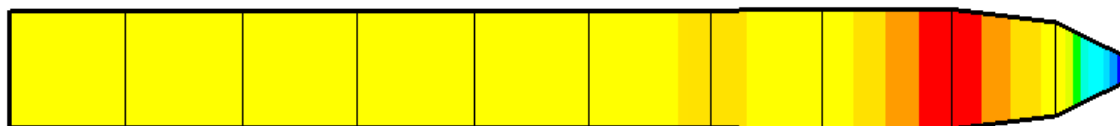
10.krok (0.08 s)



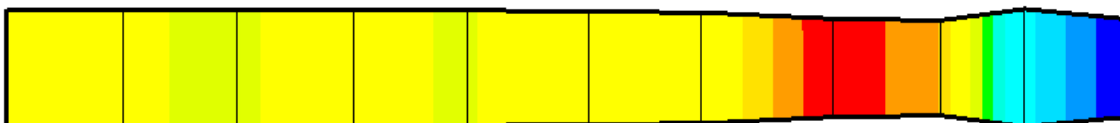
Obr. 5.6.3 Podélné vlnění pásku s časovým krokem $8e-3$ s



55. krok



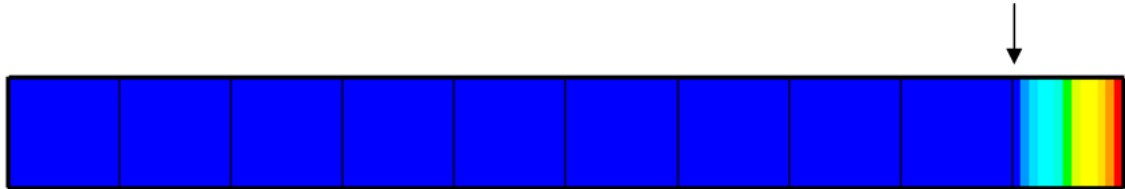
56. krok



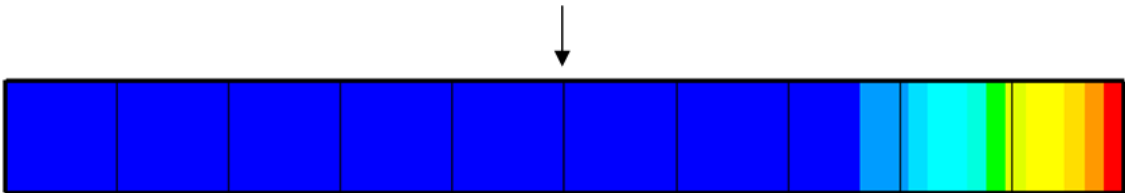
Obr. 5.6.4 Podélné vlnění pásku s časovým krokem $8e-3$ s - zhroucení výpočtu

Na obr. 5.5.5 je uvedena úloha podélného vlnění pásku řešeného s časovým krokem o velikosti $5e-3$ s. Tento krok byl již dostatečně malý a úloha byla úspěšně vyřešena. Z porovnání obrázků 5.5.3 a 5.5.4 je patrné, že nelze spoléhat na vypočtenou kritickou velikost časového kroku, ale vždy je nutné počítat s adekvátní rezervou.

1.krok (0.005 s)



5.krok (0.025 s)

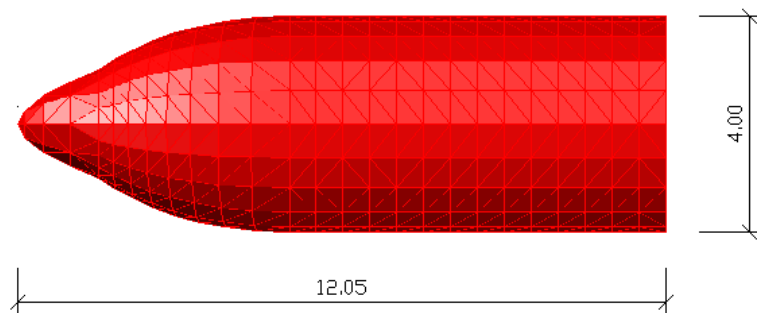


10.krok (0.05 s)



Obr. 5.6.5 Podélné vlnění pásku s časovým krokem $5e-3$ s

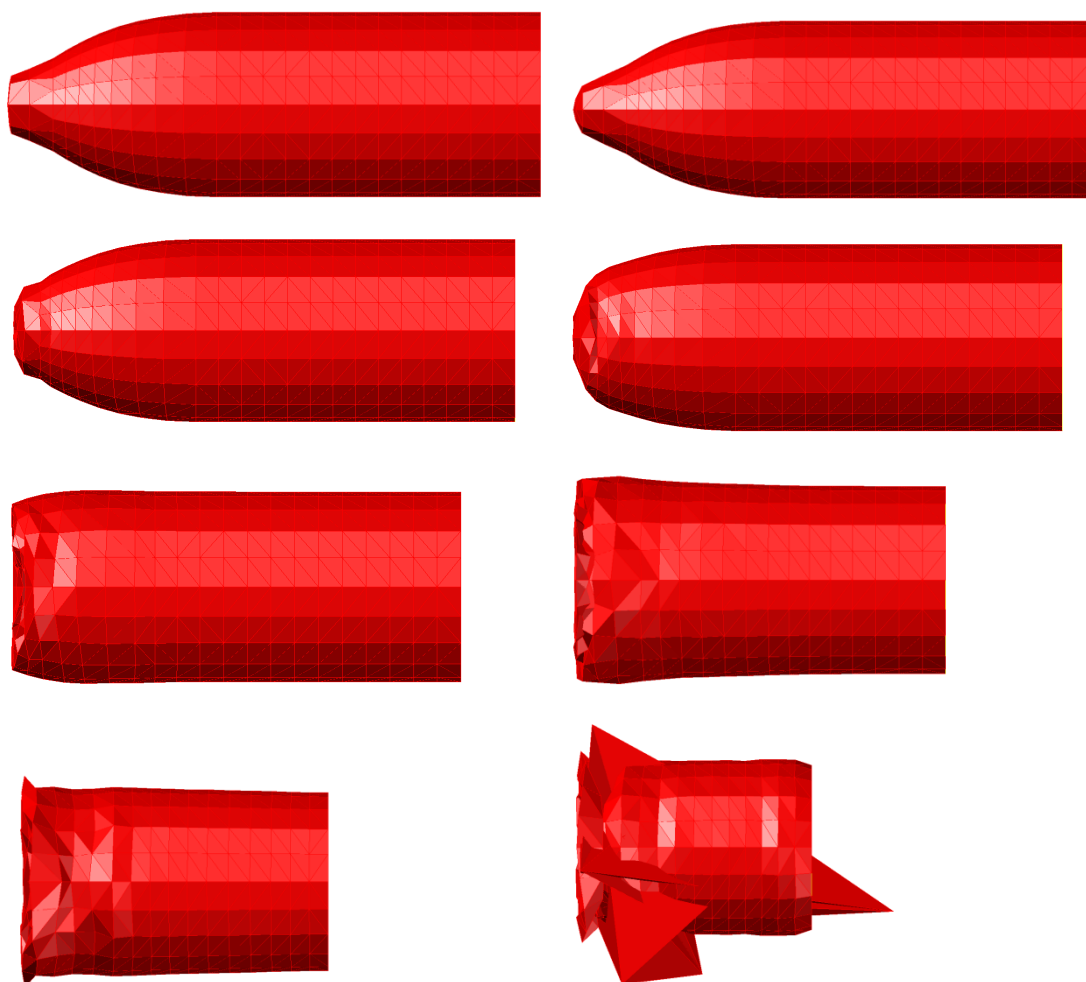
Byla provedena série výpočtů pro upravený model letadla s cílem ověřit vliv velikosti časového kroku na stabilitu úlohy. Pro tento účel byla použita přední část modelu letadla (obr. 5.6.6). Výpočet byl lineární (bez materiálové nelinearity) se součinitelem tlumení $\alpha = 1.0 \text{ s}^{-1}$.



Obr. 5.6.6 Část modelu letadla

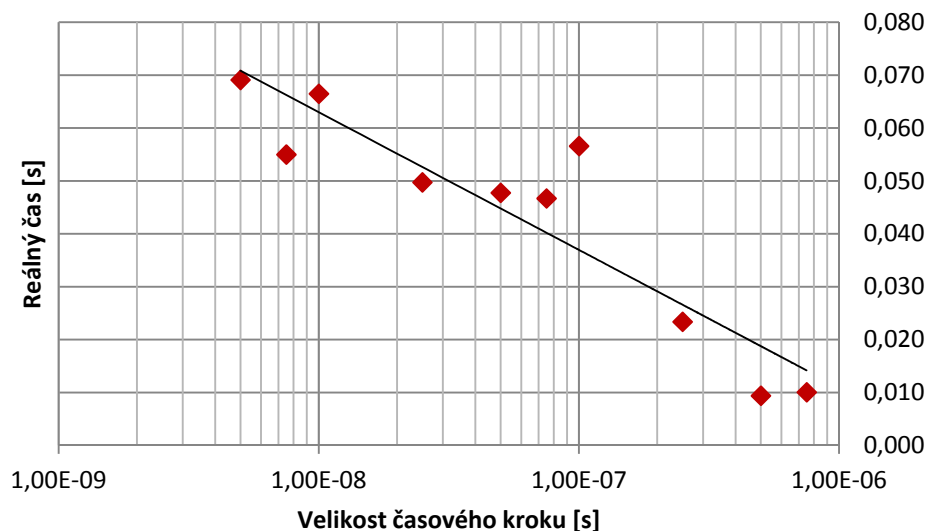
Model letadla byl takto zmenšen z důvodu co největšího snížení výpočtového času. Byl simulován náraz do tuhé stěny, která byla modelována opět pomocí podpor s gapem. Rychlost letu 500 km/h a celková hmotnost původního modelu byla zachována. Hmotnost chybějící (odříznuté) části letadla byla kompenzována adekvátním zvětšením průřezu koncového kruhového prutu.

Nejmenší nalezený časový krok, pro který byla úloha spustitelná byl $7,5e-7$ s. Další hodnoty časového kroku byly vybírány z intervalu od $7,5e-7$ až do $5,0e-9$ s. Pro časové kroky menší než $5,0e-9$ s by byla doba výpočtu i pro takto zmenšený model velmi dlouhá a nebylo tedy možné výpočty s takto malým časovým krokem provést v rámci diplomové práce. Řešením tohoto problému bude paralelizace výpočtů na grafických procesorech. Na obr. 5.6.7 jsou zobrazena stadia deformace modelu v průběhu simulace v reálném čase 0.001875 s, 0.00375 s, 0.0075 s, 0.01125 s, 0.01875 s, 0.03 s, 0.0375 s a 0.04665 s, kdy došlo ke zhroucení (ukončení) výpočtu. Numerická nestabilita se projevila enormním rozvojem anomálií, které jsou viditelné ve formě špic na zdeformovaném modelu zobrazeném v obr. 5.6.7.



Obr. 5.6.7 Deformace modelu přední části letadla

Závislost velikosti časového kroku na reálném čase, kdy došlo k přerušení výpočtu z důvodu nestability, je zobrazena v grafu 5.6.1.



Graf 5.6.1 Vliv velikosti časového kroku na stabilitu

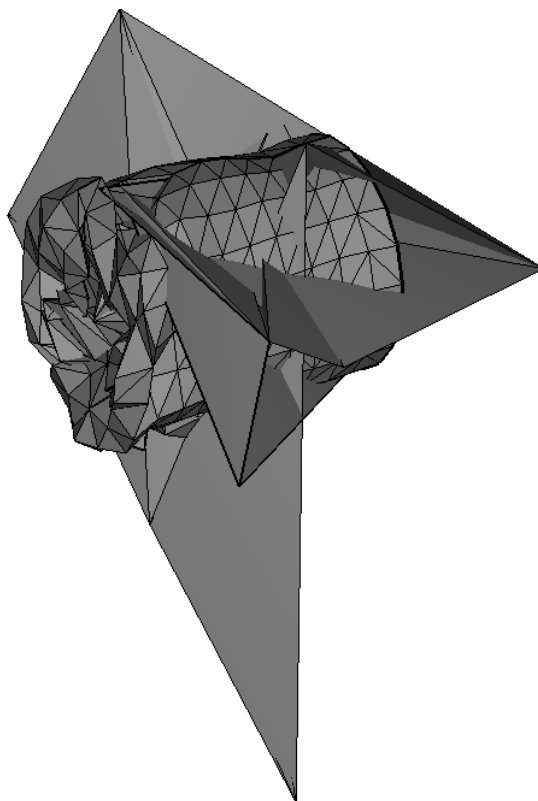
V tabulce 5.6.1 jsou vypsány zkoumané velikosti časových kroků s příslušnými reálnými časy, ve kterých byl výpočet ukončen. Ani zmenšení časového kroku o dva řády nevedlo k úspěšnému řešení úlohy.

časový krok [s]	7,50E-07	5,00E-07	2,50E-07	1,00E-07	7,50E-08
reálný čas [s]	0,010	0,009	0,023	0,057	0,047

časový krok [s]	5,00E-08	2,50E-08	1,00E-08	7,50E-09	5,00E-09
reálný čas [s]	0,048	0,050	0,066	0,055	0,069

Tab. 5.6.1 Vliv velikosti časového kroku na stabilitu

Z obr. 5.6.8 je patrné, že ani při velmi malém časovém kroku (konkrétně 5e-9 s) nebylo dosaženo zdeformování celého modelu a výpočet byl předčasně ukončen kvůli nestabilitě.



Obr. 5.6.8 Vznik nestability ve výpočtu s časovým krokem $5e-9$

Prezentovaná série výpočtů byla řešena jako lineární (materiálově lineární) se součinitelem tlumení $\alpha = 1.0 \text{ s}^{-1}$. Je nutné zdůraznit, že úloha nárazu celého letadla byla řešena odlišně. Pro tuto úlohu byla zavedena speciální úprava programu simulující disipaci energie při zplastizování s využitím ideálně pružno-plastického pracovního diagramu, která umožnila řešení s podstatně větším časovým krokem.

5.7 Tlumení

Použitá výpočetní metoda má všechny výhody explicitního schématu, pokud je matice tlumení $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ nebo $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M}$, jak bylo uvedeno v kapitole 4.1 této práce. Z tohoto důvodu byl na model kontejnmentu aplikován Raileighův útlum (5.7.1) s koeficientem $\beta = 0$.

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (5.7.1)$$

kde \mathbf{C} je matice tlumení

\mathbf{M} matice hmotnosti

\mathbf{K} matice tuhosti

α násobitel matice hmotnosti

β násobitel matice tuhosti

Velikost poměrného útlumu byla konzultována s odborníky (doc. Salajka). U betonových konstrukcí se obvykle uvažuje poměrný útlum 5 až 7 %. Počáteční odhad tlumení pro ocel vycházel z tab. 4 uvedené v tutoriálu T. Irvina [32].

Předpokládá se tlumení úměrné hmotnosti, tzn. součinitel $\beta = 0$. Uvedená velikost poměrného útlumu v takovém případě odpovídá hodnotám násobitele matice hmotnosti α v intervalu od $3,0 \text{ s}^{-1}$ do $4,2 \text{ s}^{-1}$. Přepočet byl proveden na základě vztahů 5.7.1 a 5.7.2

$$\frac{c}{M} = 2\xi\omega_0 \quad (5.7.2)$$

kde ω_0 je první vlastní frekvence
 ξ poměrný útlum

Pokud $\beta = 0$, pak lze součinitel α vyjádřit jako

$$\alpha = 2\xi\omega_0$$

Takto vypočtené tlumení pro první vlastní tvar bylo aplikováno na všechny ostatní vlastní tvary (konstantní tlumení). Vlastní frekvence kontejnmentu byla stanovena modální analýzou provedenou v přídavném modulu programu RFEM - RF_Dynam. Vlastní frekvence byly zjištěny pro železobetonové kontejnmenty s třemi různými tloušťkami stěny. Jejich hodnoty jsou uvedeny v tab. 5.7.1.

t [m]	1,5	1,0	0,7
ω [rad/s]	30,016	29,944	28,941

Tab. 5.7.1 První vlastní úhlová frekvence pro různé tloušťky kontejnmentu

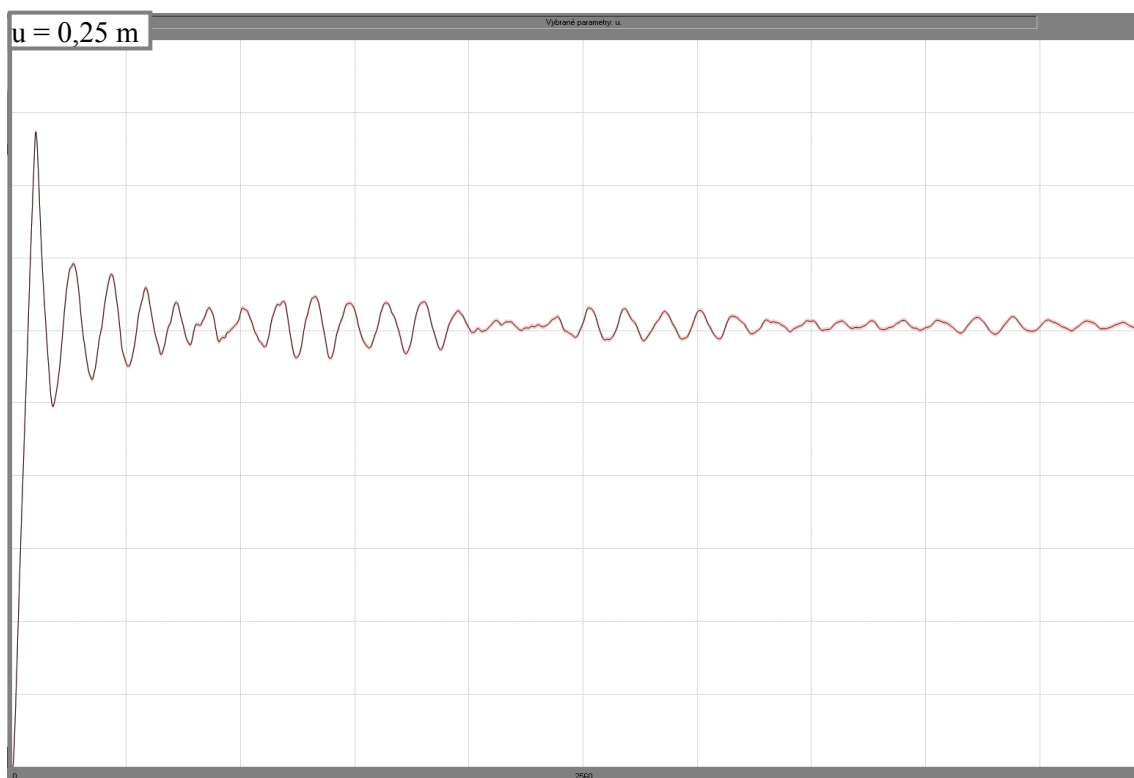
Z hodnot vlastních frekvencí pro tl. stěny kontejnmentu 1.5, 1.0 a 0.7 m lze usuzovat, že souvisí s vlastními tvary danými membránovou tuhostí. Úměrně se zmenšováním tloušťky totiž klesá jak hmotnost tak i membránová tuhost. Při membránových tvarech tedy zůstává hodnota vlastní frekvence při změně tloušťky přibližně stejná.

Vliv útlumu na dobu kmitání konstrukce je patrný z obr. 5.7.1 a 5.7.2, na kterých jsou znázorněny závislosti posunů (deformací) na čase pro železobetonové a ocelové konstrukce kontejnmentu. Grafy uvedené na obr. 5.7.1 byly získány při řešení úlohy železobetonového kontejnmentu s tloušťkou stěny 1.0 m aplikací čtyř různých hodnot součinitele tlumení: a) $\alpha = 1.0 \text{ s}^{-1}$, b) $\alpha = 3.0 \text{ s}^{-1}$, c) $\alpha = 4.2 \text{ s}^{-1}$ a d) $\alpha = 20 \text{ s}^{-1}$. Svislá osa všech uvedených grafů je rozdělena na deset stejných dílů, přičemž maximální hodnota na této ose je pro první tři grafy 0,25 m a pro poslední graf

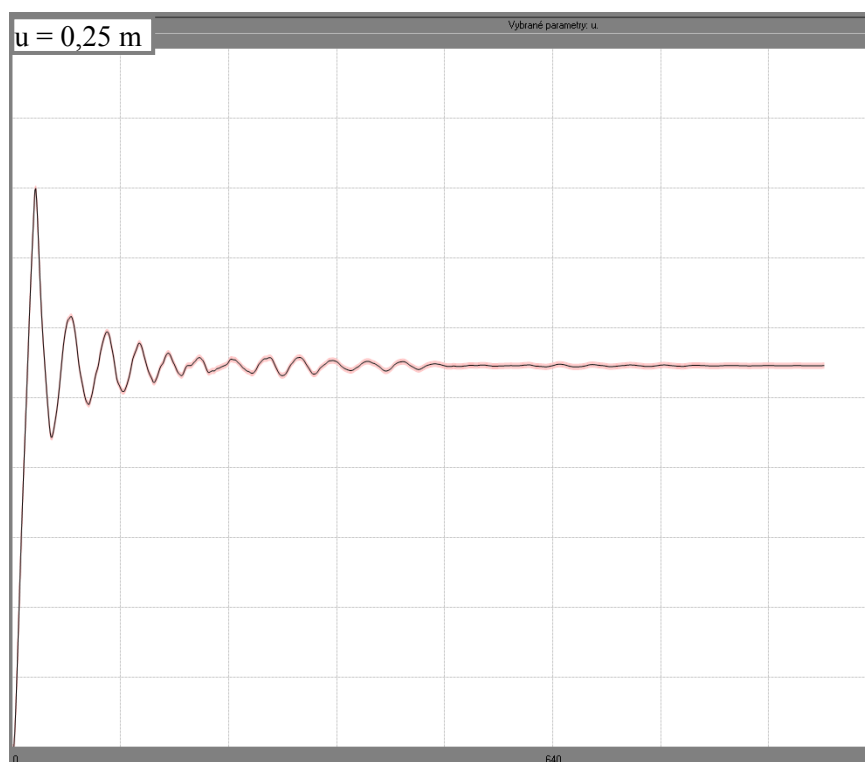
0,125 m. Z porovnání grafů plyne skutečnost, že velikost součinitele tlumení má vliv nejen na dobu kmitání konstrukce, ale také na rozsah poškození konstrukce. V případě součinitele tlumení uvažovaného hodnotou 1.0 s^{-1} nebylo ve sledovaném časovém intervalu dosaženo ustáleného stavu konstrukce. Pro součinitel tlumení $\alpha = 3.0 \text{ s}^{-1}$ bylo dosaženo ustáleného stavu v čase $t_u = 3.584 \text{ s}$ a výpočet byl ukončen v čase $t_k = 3.840 \text{ s}$. Deformace kontejnmentu se v tomto případě ustálila na hodnotě 0.137 m. Při aplikaci součinitele $\alpha = 4.2 \text{ s}^{-1}$ bylo dosaženo ustáleného stavu v čase $t_u = 2.035 \text{ s}$, výpočet byl ukončen v čase $t_k = 3.187 \text{ s}$ a hodnota trvalé deformace byla 0.128 m. V případě úlohy řešené s tlumením $\alpha = 20 \text{ s}^{-1}$ bylo dosaženo ustáleného stavu v čase $t_u = 0.294 \text{ s}$ a výpočet byl ukončen v čase $t_k = 1.048 \text{ s}$. Trvalá deformace konstrukce byla při aplikaci takto velkého tlumení výrazně menší. Ustálila se na hodnotě 0.0663 m.

Vzhledem ke skutečnosti, že velikost útlumu ovlivňuje rozsah poškození kontejnmentu s tím, že u menšího útlumu dochází k většímu poškození, byl pro parametrickou studii vybrán koeficient útlumu $\alpha = 3 \text{ s}^{-1}$, tedy dolní hranice útlumu betonových konstrukcí.

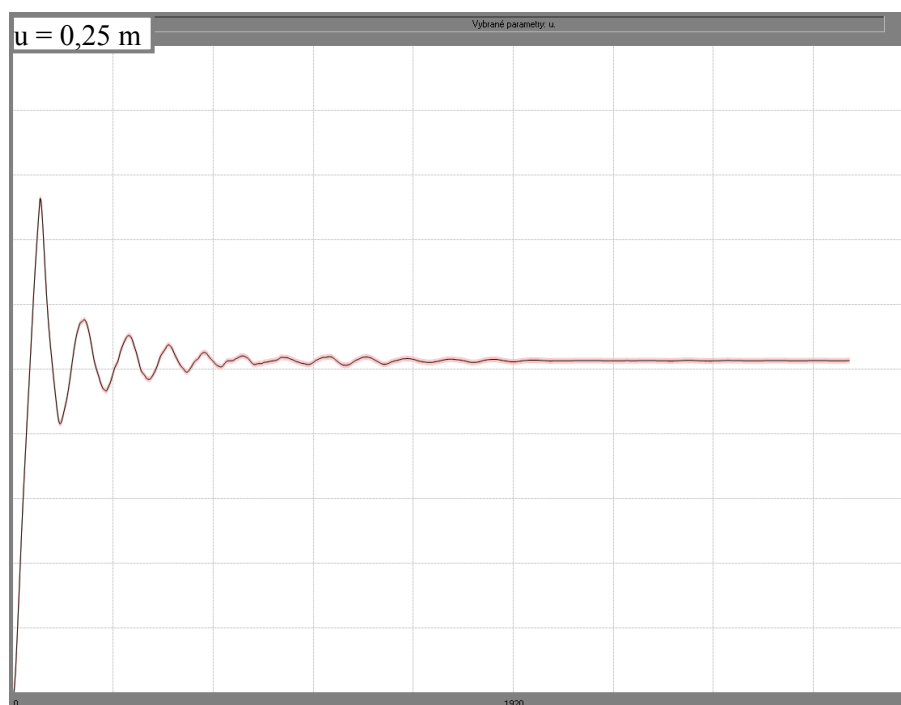
a) $\alpha = 1.0 \text{ s}^{-1}$, $t_u = ? \text{ s}$, $t_k = 5.031 \text{ s}$



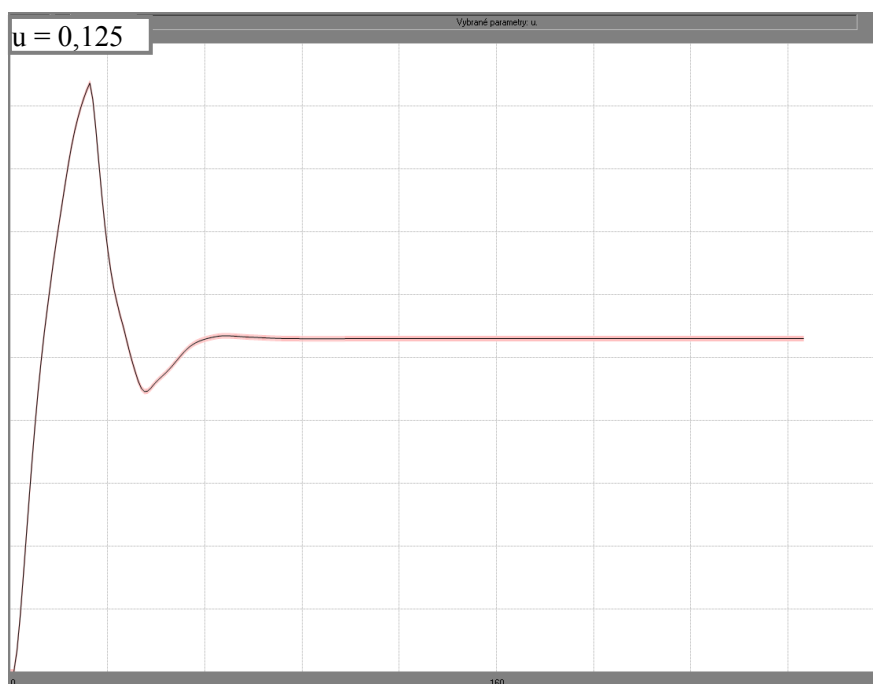
b) $\alpha = 3.0 \text{ s}^{-1}$, $t_u = 3.584 \text{ s}$, $t_k = 3.840 \text{ s}$



c) $\alpha = 4.2 \text{ s}^{-1}$, $t_u = 2.035 \text{ s}$, $t_k = 3.187 \text{ s}$



d) $\alpha = 20 \text{ s}^{-1}$, $t_u = 0.294 \text{ s}$, $t_k = 1.048 \text{ s}$

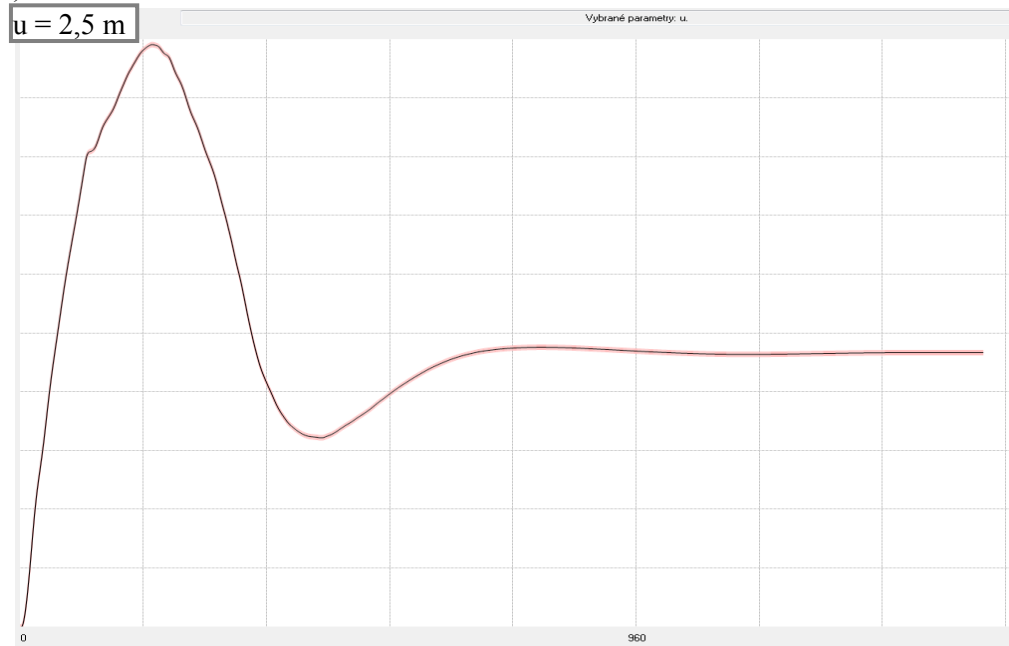


Obr. 5.7.1 Grafy závislosti max posunů na čase s různou hodnotou součinitele útlumu pro betonový kontejnment

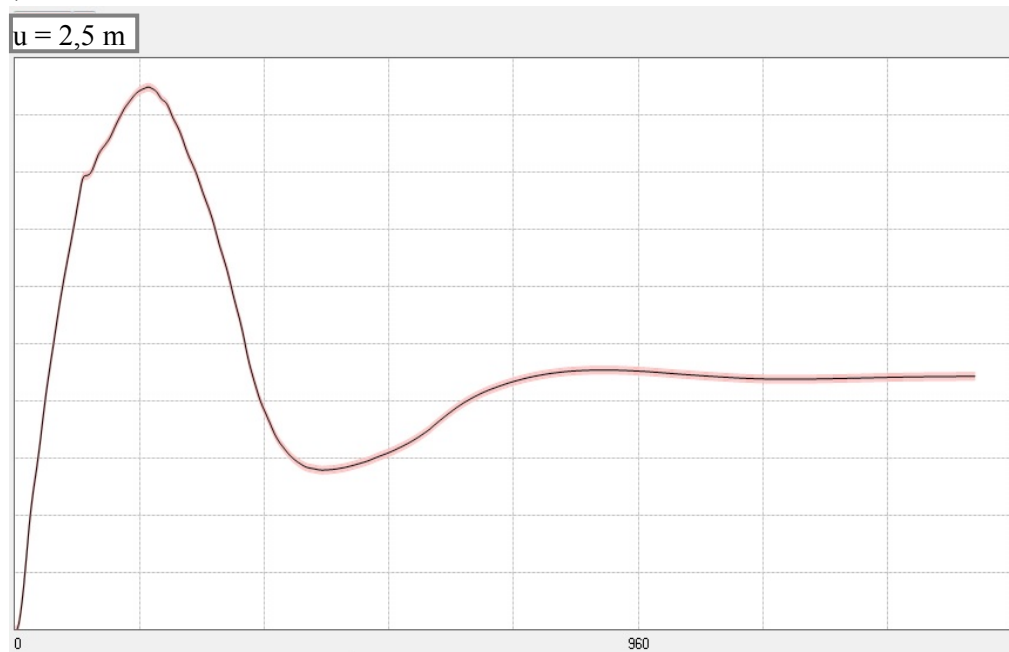
Útlum charakterizuje disipaci energie během kmitání konstrukce. Jedním ze zdrojů disipace je zplastizování materiálu. Při rozsáhlejší zplastizování se ukázalo, že vliv zplastizování materiálu hraje při útlumu kmitání větší roli než součinitel útlumu α .

Nevýznamný vliv součinitele tlumení α je patrný z obr. 5.7.2, který představuje grafy závislostí posunů na čase pro tři různé hodnoty tlumení aplikované na úlohu ocelového kontejnmentu s tloušťkou stěny 0.08 m. Úloha byla řešena pro: a) $\alpha = 0.1 \text{ s}^{-1}$, b) $\alpha = 1.0 \text{ s}^{-1}$ a pro c) $\alpha = 2.0 \text{ s}^{-1}$. K utlumení kmitání konstrukce došlo ve všech třech případech přibližně v čase 1.15 s. Trvalá deformace se při součiniteli $\alpha = 0.1 \text{ s}^{-1}$ ustálila na hodnotě 1.17 m, při $\alpha = 1.0 \text{ s}^{-1}$ se deformace ustálila na hodnotě 1.11 m a při $\alpha = 2.0 \text{ s}^{-1}$ byla výsledná hodnota deformace 2.0 m. Pro parametrickou studii odezvy ocelového kontejnmentu byl vybrán součinitel útlumu $\alpha = 0.1 \text{ s}^{-1}$, který se shoduje s doporučením v [32].

a) $\alpha = 0.1 \text{ s}^{-1}$

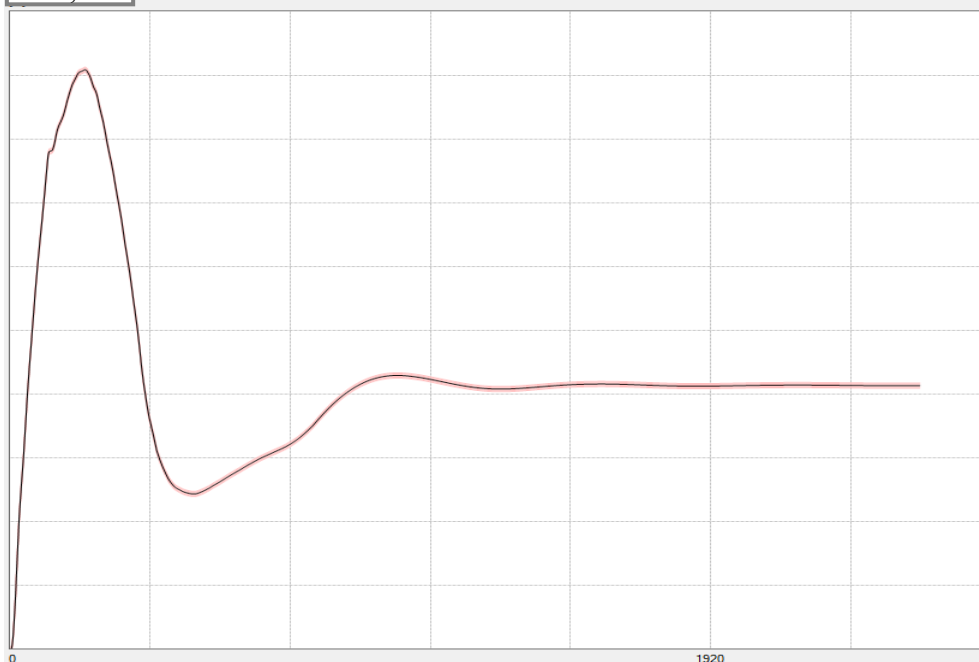


b) $\alpha = 1.0 \text{ s}^{-1}$



c) $\alpha = 2.0 \text{ s}^{-1}$

$u = 2,5 \text{ m}$



Obr. 5.7.2 Grafy závislosti max posunů na čase s různou hodnotou součinitele útlumu pro ocelový kontejnment

5.8 Parametrická studie železobetonového kontejnmentu

Byla provedena parametrická studie odezvy železobetonového kontejnmentu na zatížení od nárazu dopravního letadla. Proměnným parametrem byla tloušťka stěny konstrukce, která se pohybovala v intervalu od 0.3 m do 1.9 m s krokem 0.1 m. Výpočty byly řešeny s časovým krokem o velikosti $5 \times 10^{-5} \text{ s}$ a součinitelem útlumu $\alpha = 3 \text{ s}^{-1}$. Vliv časového kroku a důvody zvolení právě této hodnoty tlumení jsou diskutovány v předchozích kapitolách (5.6 a 5.7).

Na obr. 5.8.1 jsou prezentovány výsledky pro tloušťky kontejnmentu od 0.5 m do 1.6 m reprezentující sérii výpočtů železobetonových konstrukcí. V levé části obrázku jsou graficky znázorněny výsledné hodnoty deformace kontejnmentu a v pravé části je znázorněn rozsah plastických přetvoření pro konkrétní tloušťku stěny uvedenou vpravo na příslušném řádku. Tloušťky stěny kontejnmentu byly zvoleny v tomto rozsahu pro názornost. Výsledky celé parametrické studie železobetonových kontejnmentů jsou přehledně uvedeny v tab. 5.8.1.

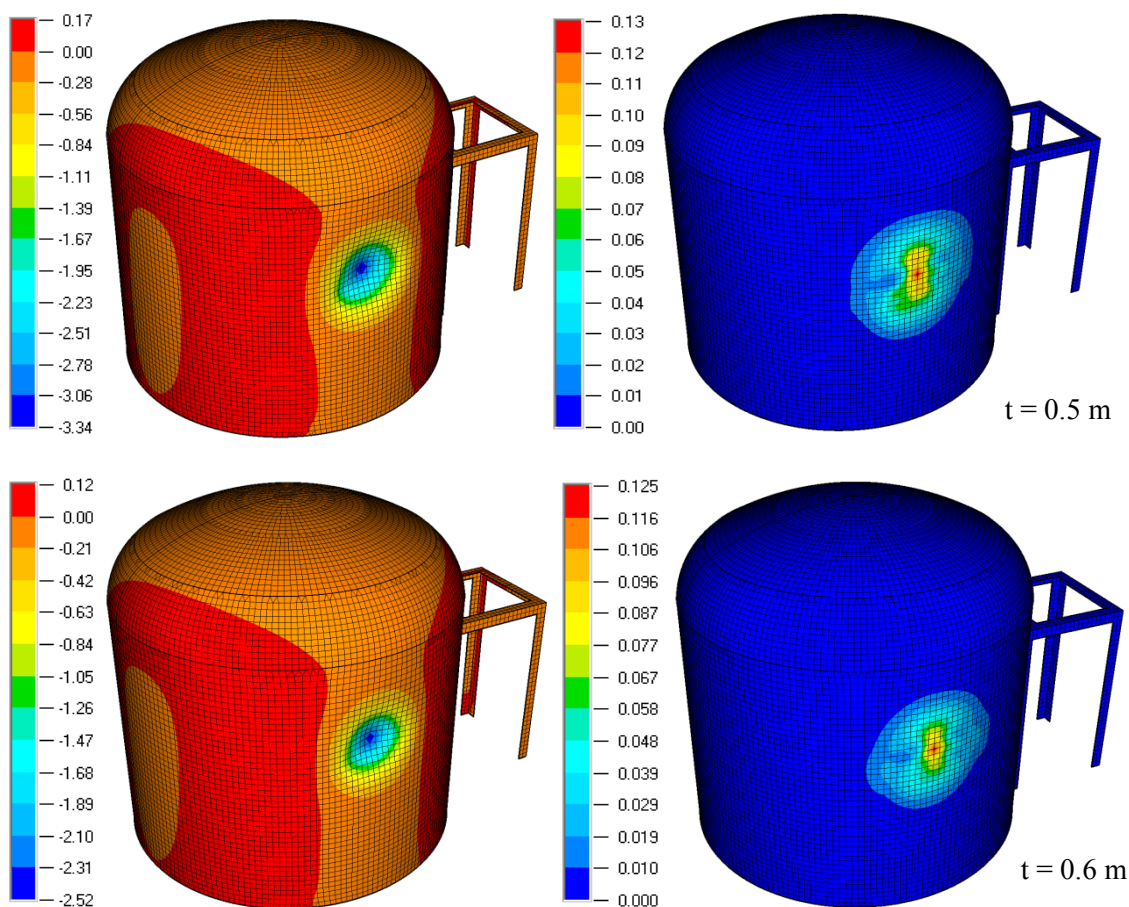
Trvalé deformace na obr. 5.8.1 a 5.9.1 jsou reprezentovány délkou vektoru posunutí. Dále jsou zobrazeny hodnoty ekvivalentního Misesova plastického přetvoření ϵ_M , které se stanoví podle vztahu 5.8.1.

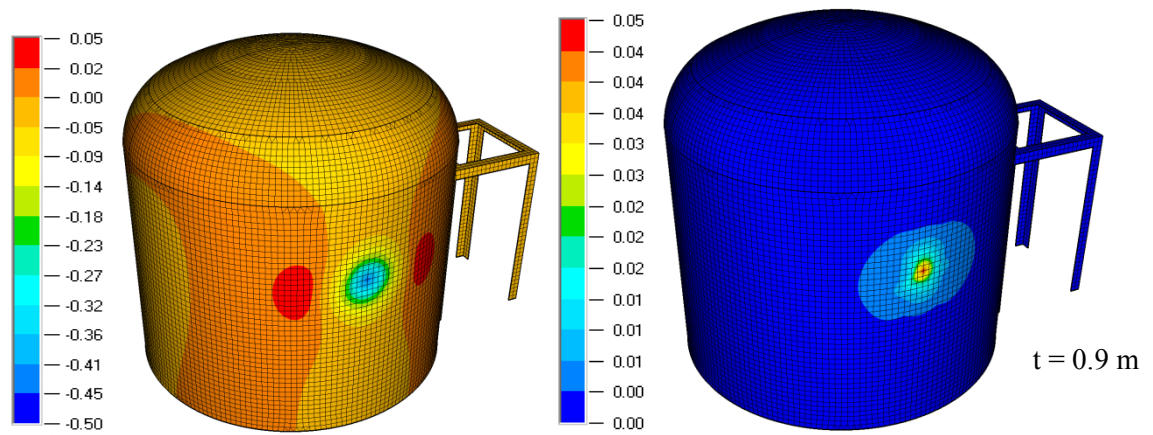
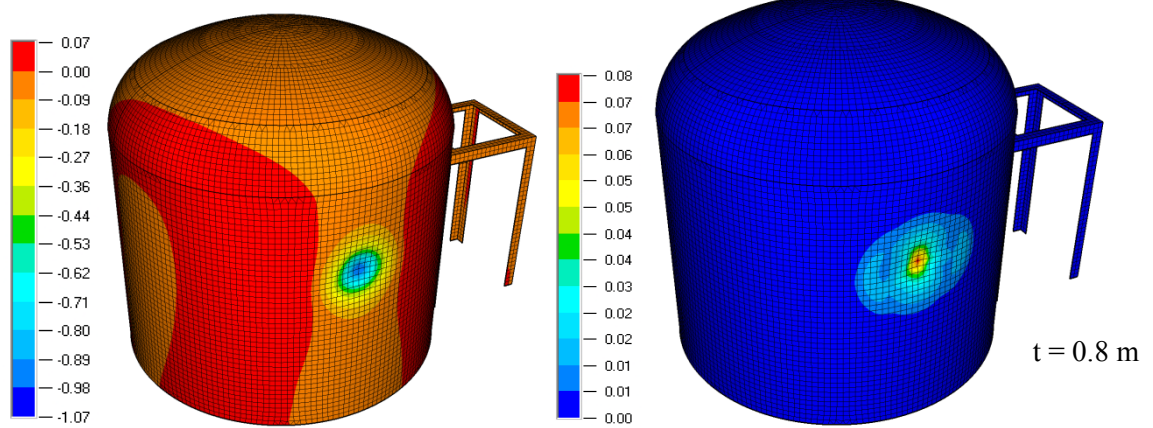
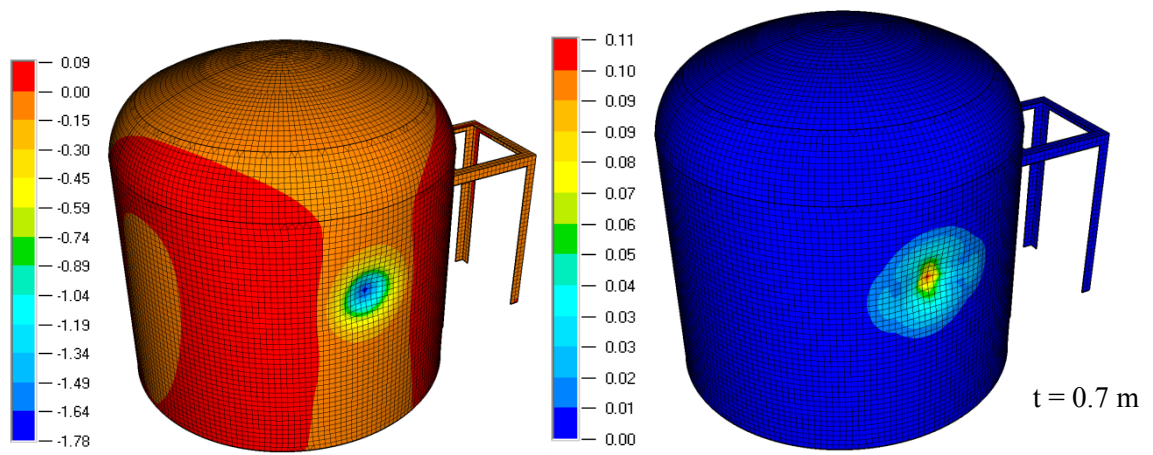
$$\varepsilon_M = \max(\varepsilon_{M+}, \varepsilon_{M-}) \quad (5.8.1)$$

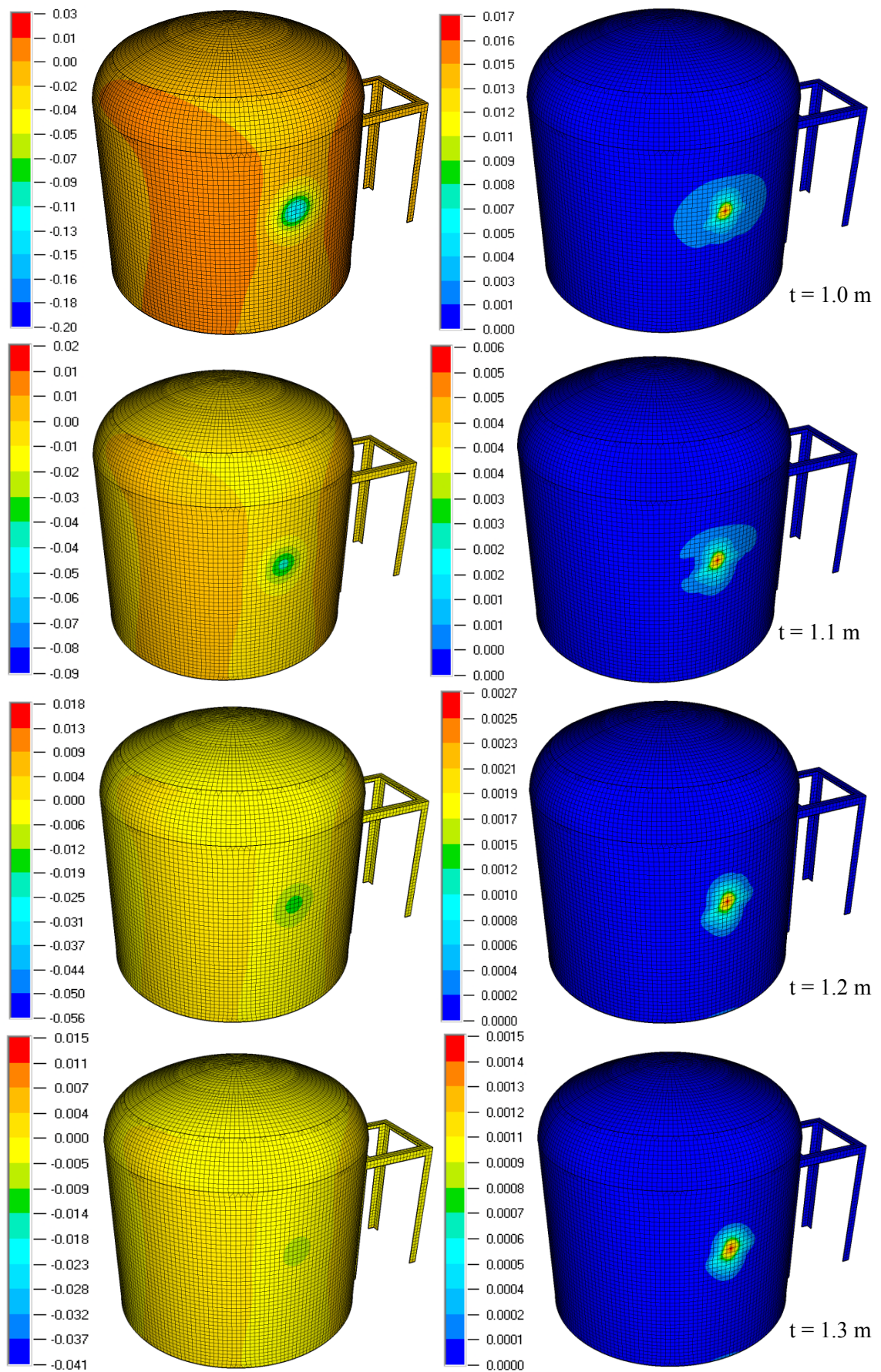
$$\varepsilon_{M+} = \frac{\sqrt{(\varepsilon_{x+} - \varepsilon_{y+})^2 + \left(\frac{\varepsilon_{x+} + \mu\varepsilon_{y+}}{1-\mu}\right)^2 + \left(\frac{\mu\varepsilon_{x+} + \varepsilon_{y+}}{1-\mu}\right)^2 + \frac{3}{2}\gamma_{xy+}^2}}{\sqrt{2}(1+\mu)} \quad (5.8.2)$$

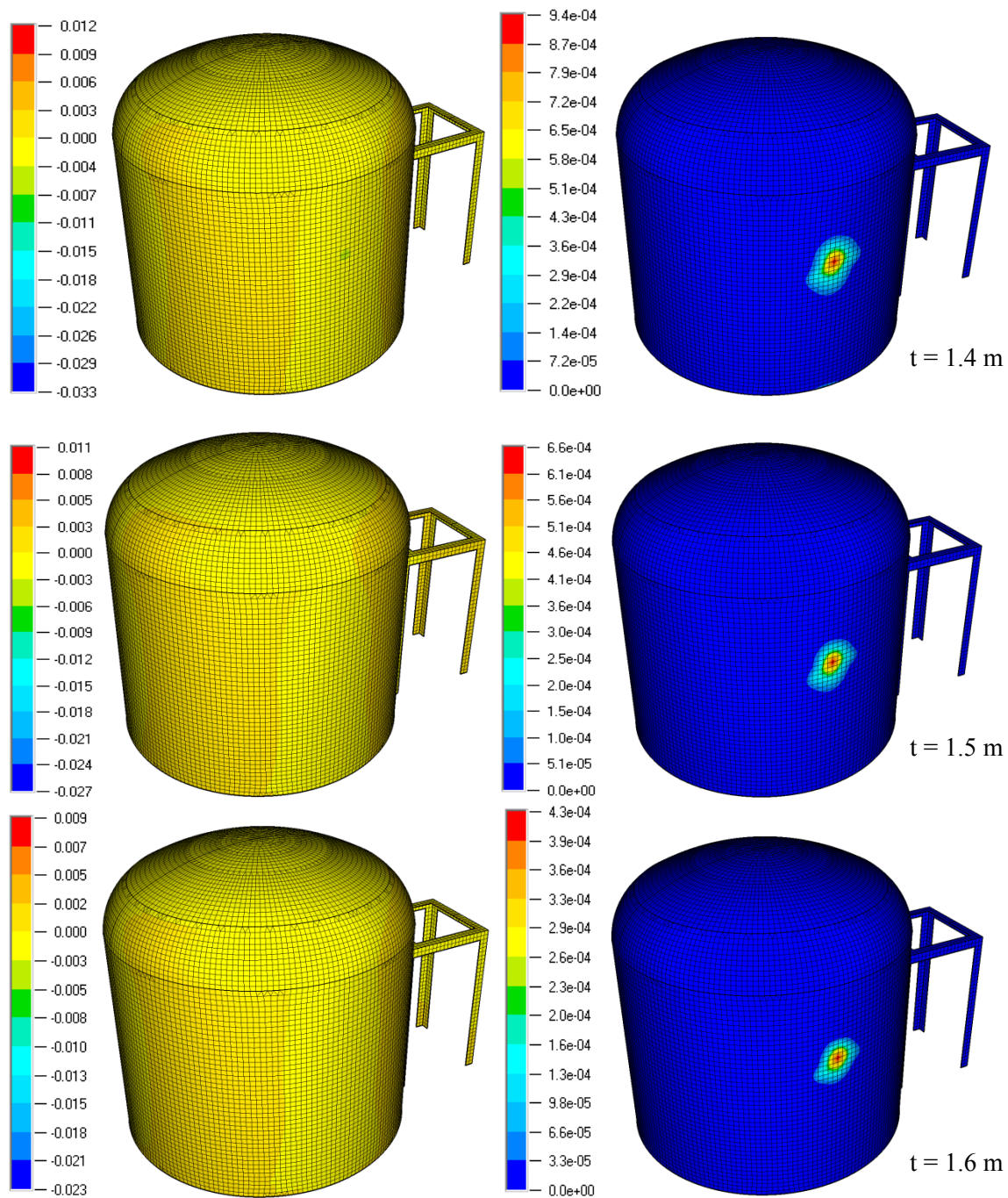
$$\varepsilon_{M-} = \frac{\sqrt{(\varepsilon_{x-} - \varepsilon_{y-})^2 + \left(\frac{\varepsilon_{x-} + \mu\varepsilon_{y-}}{1-\mu}\right)^2 + \left(\frac{\mu\varepsilon_{x-} + \varepsilon_{y-}}{1-\mu}\right)^2 + \frac{3}{2}\gamma_{xy-}^2}}{\sqrt{2}(1+\mu)} \quad (5.8.3)$$

kde ε_{M+} je ekvivalentní Misesovo plastické přetvoření na kladném povrchu
 ε_{M-} ekvivalentní Misesovo plastické přetvoření na záporném povrchu
 μ součinitel příčné kontrakce (Poissonův součinitel)
 $\varepsilon_{x,y}, \gamma_{xy}$ jsou složky tenzoru deformace









Obr. 5.8.1 Trvalé deformace a rozsah plastických přetvoření u železobetonových kontejnertů s tl. 0.5 až 1.6 m

Tloušťka stěny [m]	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Trvalá deformace [m]	5,76E+0	4,28E+0	3,25E+0	2,43E+0	1,70E+0	9,90E-1	4,26E-1	1,37E-1
Plastické přetvoření	2,02E-1	1,53E-1	1,28E-1	1,25E-1	1,10E-1	8,00E-2	5,00E-2	1,70E-2

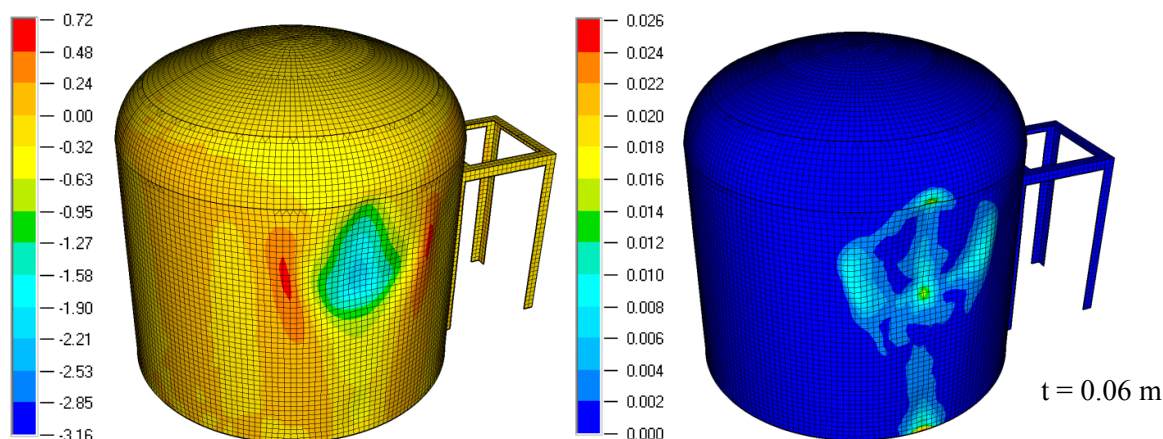
Tl. stěny [m]	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
Deformace [m]	3,96E-2	1,61E-2	7,84E-3	4,01E-3	2,06E-3	1,01E-3	4,81E-4	2,16E-4	7,99E-5
Plastické přetvoření	6,00E-3	2,70E-3	1,50E-3	9,40E-4	6,60E-4	4,26E-4	2,80E-4	1,90E-4	1,18E-4

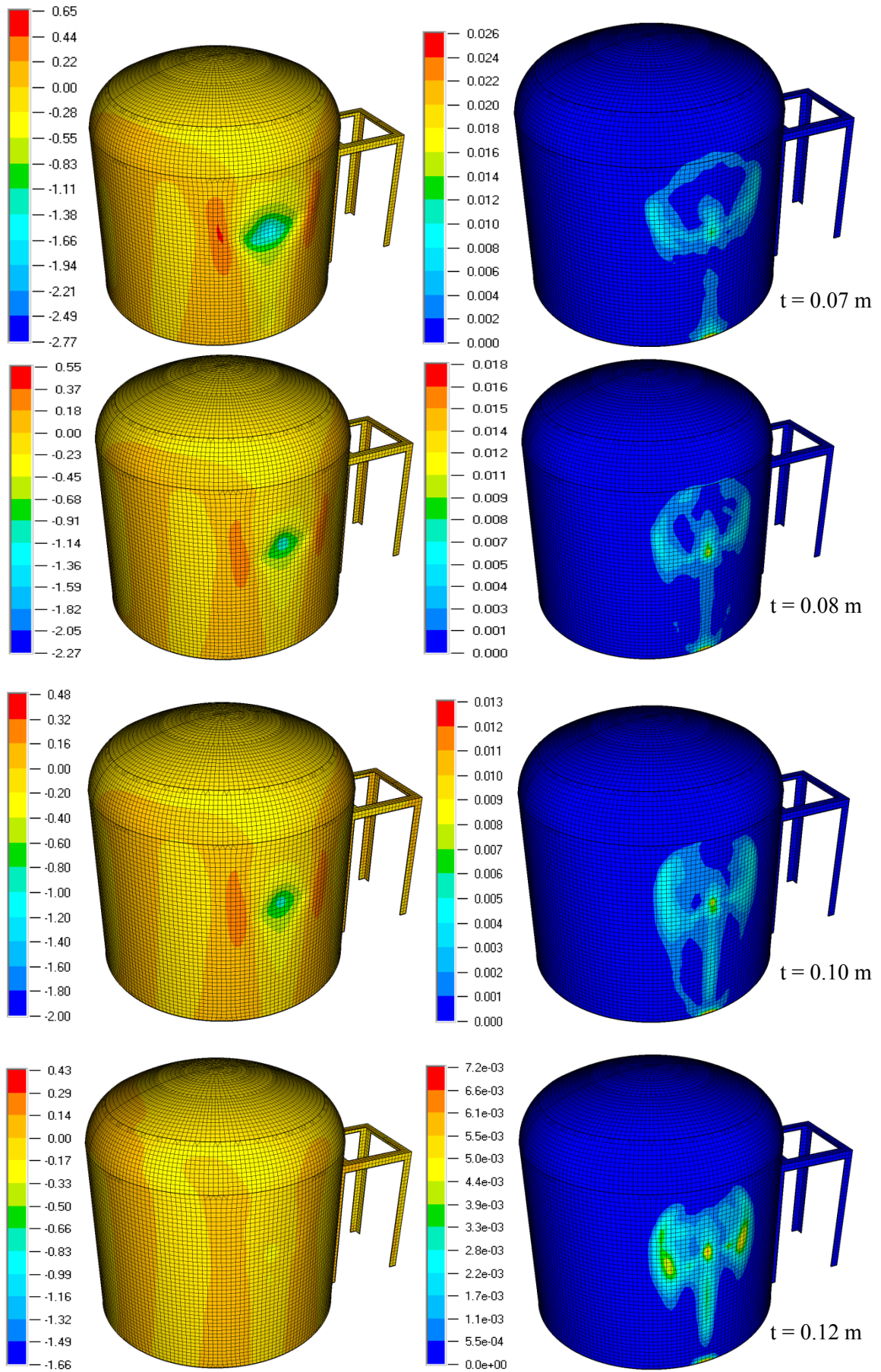
Tab 5.8.1 Maximální hodnoty trvalých deformací a plastických přetvoření u železobetonových kontejnmentů s tl. 0.3 až 1.9 m

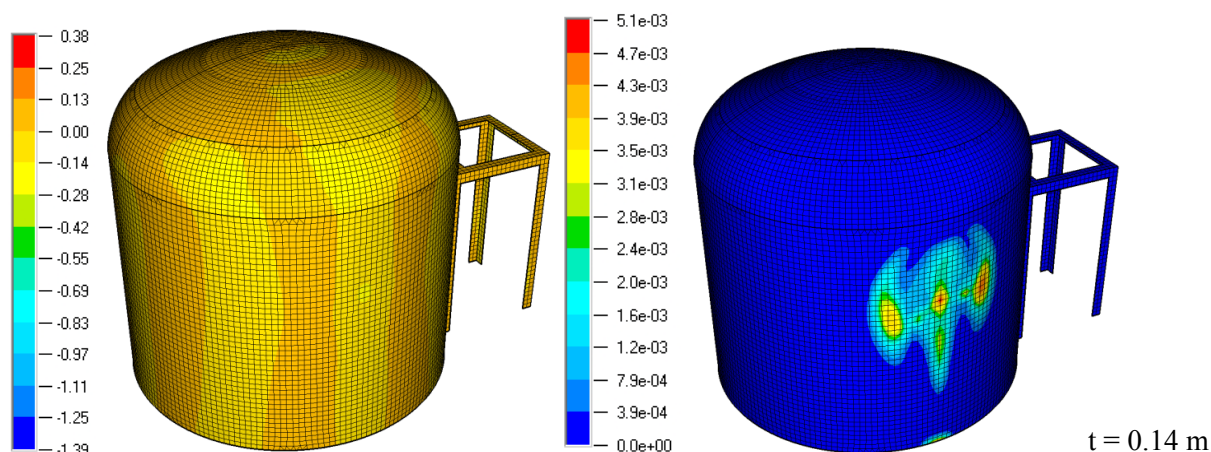
5.9 Parametrická studie ocelového kontejnmentu

Byla provedena parametrická studie odezvy ocelového kontejnmentu na zatížení od nárazu dopravního letadla. Proměnným parametrem byla tloušťka stěny konstrukce, která se pohybovala v intervalu od 0.05 m do 0.14 m. Zkoumané tloušťky byly 0.06 m, 0.07 m, 0.08 m, 0.10 m, 0.12 m a 0.14 m. Výpočty byly řešeny s časovým krokem o velikosti $1e-5$ s a součinitelem útlumu $\alpha = 0.1 \text{ s}^{-1}$. Vliv časového kroku a zvolení právě této hodnoty tlumení jsou diskutovány v předchozích kapitolách (5.6 a 5.7).

Na obr. 5.9.1 jsou prezentovány výsledky pro všechny zkoumané tloušťky stěny kontejnmentu reprezentující sérii výpočtů ocelových konstrukcí. Výsledky jsou zobrazeny analogicky s předchozími, tedy v levé části obrázku jsou graficky znázorněny výsledné hodnoty deformace kontejnmentu a v pravé části je znázorněn rozsah plastických přetvoření pro konkrétní tloušťku stěny.







Obr. 5.9.1 Trvalé deformace a rozsah plastických přetvoření u ocelových kontejnmentů s tl. 0.06 až 0.14 m

Tloušťka stěny [m]	0,05	0,06	0,07	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16
Trvalá deformace [m]	2,80+0	2,13E+0	1,57E+0	1,03E+0	8,71E-1	2,35E-1	1,73E-1	1,47E-1
Plastické přetvoření	2,58E-2	2,60E-2	2,56E-2	1,80E-2	1,30E-2	7,20E-3	5,10E-3	5,87E-3

Tab. 5.9.1 Maximální hodnoty trvalých deformací a plastických přetvoření u ocelových kontejnmentů s tl. 0.05 až 0.16 m

5.10 Vyhodnocení výsledků

Při porovnání obr. 5.8.1 a 5.9.1 lze u železobetonových a ocelových kontejnmentů pozorovat kvalitativně odlišné tvary permanentní deformace. V případě železobetonových konstrukcí jsou trvalé deformace přibližně kruhového tvaru a korespondují s tvarem plastických přetvoření. Na druhou stranu u ocelových kontejnmentů jsou tvary deformací a plastických přetvoření nepravidelné. Kruhové tvary deformací a plastických přetvoření, které byly detekovány u železobetonových konstrukcí, jsou způsobeny vyšší ohybovou tuhostí železobetonu ve srovnání s ocelí. Přesněji řečeno, důvodem je rozdílný poměr ohybové a membránové tuhosti u zkoumaných ocelových a železobetonových konstrukcí, který vyplývá ze skutečnosti, že membránová tuhost roste lineárně se zvětšováním tloušťky na rozdíl od ohybové tuhosti, která se zvyšuje s třetí mocninou tloušťky stěny konstrukce. Dalším viditelným rozdílem je výraznější vliv dopadu motorů u ocelových kontejnmentů.

Pokud se jedná o kvantitativní hodnocení výsledků, dá se říci, že u konstrukcí s větší tloušťkou stěny byly zjištěné hodnoty permanentní deformace tak malé, že je lze považovat za zanedbatelné. U železobetonových kontejnmentů jsou tímto myšleny tloušťky větší než 1.4 m, kterým odpovídají trvalé deformace v řádu desetin milimetru. Plastické přetvoření bylo v těchto případech rovněž zanedbatelné a chování těchto

konstrukci by bylo možné považovat za elastické. Na druhé straně testované série železobetonových kontejnmentů, tedy u konstrukcí s menší tloušťkou stěny, byly zaznamenány významné trvalé deformace a masivní plastická přetvoření. Mezi tyto patří kontejnmenty s tloušťkou stěny menší než 1 m. Na vnějším povrchu stěny kontejnmentu vystupují přetvoření se záporným znaménkem, ovšem na vnitřním povrchu se objevuje přetvoření s kladným znaménkem, ale záporná přetvoření převládají. Přestože se dá u kontejnmentů s menší tloušťkou stěny předpokládat velké poškození a výskyt trhlin v důsledku drcení betonu na vnějším povrchu, je možné, že část průřezu v okolí neutrálné osy by mohla zůstat neporušena. K ověření tohoto předpokladu by bylo nutné provést detailnější analýzu zahrnující podrobnější model.

Série výpočtů odezvy ocelových kontejnmentů nebyla kvůli omezeným časovým možnostem provedena pro takové množství různých tloušťek stěny a mezi výsledky nelze tedy nalézt takové extrémy jako u železobetonových kontejnmentů. Největší zjištěné plastické přetvoření o velikosti 2,6 % bylo zjištěno u kontejnmentu s tloušťkou stěny 0,06 m. Tažnost vysokopevnostních ocelí je několikanásobně vyšší než zjištěná hodnota, proto by nemělo dojít k porušení (protržení) plechu. Největšímu zjištěnému plastickému přetvoření odpovídá deformace o velikosti 2,13 m. V případě prověřování bezpečnosti kontejnmentu by bylo při takto velkých deformacích vnějšího pláště budovy nutné ověřit jejich dopad na vnitřní technologické vybavení.

Výsledky provedené parametrické studie je možné využít při stanovení odhadu rozsahu poškození způsobeného nárazem dopravního letadla u kontejnmentů podobného typu. Dalším možným uplatněním výsledků této studie je při návrhu nových kontejnmentů z železobetonu a oceli (především ve fázi předběžného návrhu - tloušťka stěny konstrukce).

Prezentované výsledky respektive jejich přesnost a tedy i vypovídací hodnota byly limitovány možnostmi programu RFEM, ve kterém byly jednotlivé úlohy řešeny. Na základě omezených možností, bylo nutné zavést řadu zjednodušujících předpokladů a úprav. Přesnější a detailnější analýzy by bylo možné dosáhnout zavedením následujících bodů:

- zadání zatížení grafem (tabulkou) znázorňujícím závislost zatížení na čase
- výstižnější model železobetonu - např. rozetřená výztuž modelovaná pomocí vrstevnatého skořepinového prvku
- využití grafických procesorů, které by vedlo k mnohonásobnému zrychlení výpočtů a možnosti aplikovat plasticitu i na rozsáhlé úlohy nebo na jednoduché úlohy řešené v mnoha variantách
- umožnění změny (přepočtu) velikosti časového kroku v průběhu výpočtu, která by vedla k menšímu času nutnému pro výpočet

6 ZÁVĚR

Cílem práce bylo přispět k vývoji specifické metody řešení rychlých dynamických jevů včetně geometricky i materiálově nelineárních úloh v programovém systému RFEM. Pro analýzu těchto dějů byla jako nejvhodnější vybrána explicitní metoda. Byly prozkoumány možnosti řešení účinku nárazu dopravního prostředku do stavební konstrukce touto metodou pomocí programového systému RFEM. V souvislosti s diplomovou prací byly do vývojové verze programu RFEM začleněny některé nové prvky nutné pro aplikaci explicitní metody. Pomocí těchto úprav bylo možné analýzu odezvy stavební konstrukce na zatížení nárazem dopravního prostředku provést, i když nebylo ještě k dispozici komfortní uživatelské prostředí. Práce přispěla k formulování požadavků na další vývoj programu s cílem umožnit použití explicitní metody pro běžné uživatele programu RFEM.

Práce je členěna do dvou bloků. Teoretický blok je tvořen kapitolami 2, 3 a 4. Úvod do teorie geometrické a materiálové nelinearity je předmětem kapitol 2 a 3 této práce. Explicitní metodě je věnována kapitola 4. Mezi nevýhody explicitní metody patří její podmíněná stabilita. Podmínka stability je formulována v podkapitole 4.2. Praktický blok představuje kapitola 5 zahrnující sérii výpočtů nárazu dopravního prostředku do stavební konstrukce. Vzhledem k problémům se stabilitou metody při velkých deformacích byla též provedena studie vlivu změny velikosti časového kroku na stabilitu úlohy.

Pro účely této práce byla stavební konstrukce v řešené úloze reprezentována kontejnmentem jaderné elektrárny. Za dopadající těleso bylo zvoleno běžné dopravní letadlo. Studie nárazu byla rozdělena do dvou fází, ve kterých vystupují oba modely samostatně, protože RFEM neumožňuje řešení dynamických kontaktních úloh v plné obecnosti. Nejprve byla provedena analýza nárazu letadla do tuhé stěny. Na jejím základě byla určena velikost zatížení a následně byla provedena výsledná analýza kontejnmentu.

Cílem práce bylo také určit rozsah poškození stavební konstrukce od nárazu dopravního prostředku na základě numerické simulace. Byla provedena parametrická studie odezvy železobetonového a ocelového kontejnmentu na zatížení od nárazu letadla. Proměnným parametrem byla tloušťka stěny konstrukce, která se pohybovala u železobetonových konstrukcí v intervalu od 0,3 m do 1,9 m a u ocelových konstrukcí v intervalu od 0,06 m do 0,14 m. Pro vyhodnocení rozsahu poškození kontejnmentu byly sledovány maximální trvalé deformace a plastická přetvoření. U železobetonových konstrukcí s větší tloušťkou stěny (větší než 1,4 m) byly zjištěné hodnoty permanentní deformace tak malé, že je lze považovat za zanedbatelné. Plastické přetvoření bylo v těchto případech rovněž zanedbatelné a chování těchto konstrukcí by bylo možné považovat za elastické. Na druhou stranu u konstrukcí s menší tloušťkou stěny (menší než 1,0 m), byly zaznamenány významné trvalé deformace a masivní plastická přetvoření. V případě ocelových kontejnmentů bylo největší plastické přetvoření

zjištěné u kontejnmentu s tloušťkou stěny 0,06 m několikanásobně menší než tažnost konstrukční oceli a nemělo by tedy způsobit porušení ocelového plechu.

Výsledky provedené parametrické studie je možné využít při stanovení odhadu rozsahu poškození způsobeného nárazem dopravního letadla u kontejnmentů podobného typu nebo při návrhu nových kontejnmentů z železobetonu a oceli (především ve fázi předběžného návrhu).

Na uvedenou diplomovou práci by mohly dále navazovat analýzy pro různé rychlosti dopravního letadla před nárazem do kontejnmentu. Zajímavé by mohlo být také porovnání rozsahu poškození způsobeným nárazem dopravního letadla a stíhacího letounu v plné rychlosti.

Seznam použité literatury

- [1] NĚMEC, I., *Nelineární mechanika*, studijní opora, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Ústav stavební mechaniky, Brno, 2006
- [2] NETO, E. S., PERIC, D., OWENS, D., *Computational methods for plasticity: theory and applications*, John Wiley & Sons Ltd, 2008, ISBN 978-0-470-69452-7
- [3] BELYTSCHKO, T., LIU, W. K., MORAN, B., *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley & Sons Ltd., 2000, ISBN 0-471-98773-5
- [4] JIRÁSEK, M., BAŽANT, Z. P., *Inelastic Analysis of Structures*, John Wiley & Sons Ltd, 2002, 1st ed., ISBN 0-471-98716-6
- [5] LUBLINER, J., *Plasticity Theory*, Dover Publications, 2008, 544 s.
- [6] JIRÁSEK M., ZEMAN, J., *Přetváření a porušování materiálů - dotvarování, plasticita, lom a poškození*, České vysoké učení technické v Praze, 2008, 177 s., ISBN 978-80-01-03555-9
- [7] BRDEČKO, L., ZÍDEK, R., *Stavební mechanika - pružnoplastická analýza*, CD01-M04, studijní opora, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Ústav stavební mechaniky, Brno, 2008
- [8] WRIGGERS, P., *Nonlinear Finite Element Methods*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008, ISBN: 978-3-540-71000-4
- [9] YU, M., MA, G., LI, J., *Structural Plasticity - Limit, Shakedown and Dynamic Plastic Analyses of Structures*, Zhejiang University Press, Hangzhou and Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg, 2009, ISBN 978-3-540-88151-3
- [10] KACHANOV, L. M., *Foundations of the Theory of Plasticity*, North-Holland Publishing Company, 1971
- [11] BONET, J., D. WOOD, R., *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*, 2nd Edition, Cambridge University Press, 2008
- [12] DIMITRIENKO, Y.I., *Nonlinear Continuum Mechanics and Large Inelastic Deformations*, Springer Science+Business Media B.V., 2011
- [13] REDDY, J.N., *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford University Press, 2004, 463 p., ISBN 019852529X
- [14] IBRAHIMBEGOVIC, A., *Nonlinear Solid Mechanics: Theoretical Formulations and Finite Element Solution Methods*, Springer Science+Business Media B.V., 2009
- [15] FELIPPA, C., MOSTAFA, M., *The Geometric Nonlinear Analysis of Iso-P Quadrilateral Element in 2D*, 2009, dostupné z <<http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/AFEM.d/AFEM.projects.d/AFEM.projects.2009.d/AFEM.pr.09.MM.d/MM.report.pdf>>, cit. 9/2012
- [16] AKASHA, N. M., RAHMAN, E. M., *Evaluation of "True stress" for Geometrically Nonlinear Plane Stress/Strain Problems*, Design for Scientific Renaissance, 2012, cit. 10/2012, dostupné z <<http://www.significance.co.uk/dsr/index.php/JASER/article/view/156/201>>
- [17] CRISFIELD, M. A., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 1: Essentials*, John Wiley & Sons Ltd, 1991
- [18] HAUTH, M., STRASSER, W., *Corotational Simulation of Deformable Solids*, 2004, Journal of WSCG, cit. 10/2012, dostupné z <http://wscg.zcu.cz/wscg2004/Papers_2004_Full/I02.pdf>
- [19] KRENK, S., *Non-linear Modeling and Analysis of Solids and Structures*, Cambridge University Press, 2009
- [20] TORRE, CH., *Intermediate Classical Mechanics: Newton's Third Law. Multi-particle systems.*, cit. 10/2012, dostupné z <<http://www.physics.usu.edu/torre/>>

- 3550_Fall_2011/Lectures/03.pdf>
- [21] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L., *The Finite Element Method, Volume 2: Solid Mechanics*, Butterworth Heinemann, 5. ed., 2000
 - [22] NĚMEC, I., KOLÁŘ, V., ŠEVČÍK, I., VLK, Z., BLAAUWENDTRAAT, J., BUČEK, J., TEPLÝ, B., NOVÁK, D., ŠTEMBERA, V., *Finite Element Analysis of Structures - Principles and Praxis*, Shaker Verlag Aachen, 2010
 - [23] PETRUŠKA, J., *Počítačové metody mechaniky*, skriptum, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, 2002, dostupné z <<http://www.umt.fme.vutbr.cz/img/fckeditor/file/opory/PocitacoveMetodyII/PocitacovaMechanikaII.pdf>>
 - [24] BOŘKOVEC, J., SUCHÁNEK, M., *Výpočtové modely tvárného porušování kovů v simulaci technologických procesů, Závěrečná zpráva projektu FRVŠ 2842/2006/G*, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, FSI, VUT, Brno, 2006, dostupné z <http://www.umt-old.fme.vutbr.cz/_studium/_opory/explicitni_mkp/frvs.pdf>
 - [25] WU, S. R., GU, L., *Introduction to the Explicit Finite Element Method for Nonlinear Transient Dynamics*, John Wiley & Sons, Inc., 2012
 - [26] LS-DYNA User's Guide: *Time step size*, cit. 11/2012, dostupné z <<http://www.dynasupport.com/tutorial/ls-dyna-users-guide/time-step-size>>
 - [27] HALLQUIST, J. O., *LS DYNA Theory Manual*, Livermore Software Technology Corporation, 2006
 - [28] TOPPING, B. H. V., KHAN, A. I., *Parallel Computation Schemes for Dynamic Relaxation*, 2006, dostupné z <<http://users.monash.edu.au/~asadk/JournalPapers/x-pardr.pdf>>
 - [29] *Explicit Dynamic Relaxation*, dostupné z <http://folk.uio.no/esjen/kilder/NFEM.Ch22.pdf>, cit. 11/2012
 - [30] OECD/NEA Group of Experts, *SOAR on Containment Thermalhydraulics and Hydrogen Distribution*, report of OECD/NEA, June 1999, cit. 11/2012, dostupné z <<http://www.oecd-nea.org/nsd/docs/1999/csni-r99-16.pdf>>
 - [31] *Boeing 737*, Wikipedia, cit. 11/2012, dostupné z <http://en.wikipedia.org/wiki/Boeing_737>
 - [32] IRVINE, T., *Damping Properties of Materials - Revision C*, 2004, cit. 12/2012, dostupné z <<http://www.cs.wright.edu/~jslater/SDTCOutreachWebsite/damping%20properties%20of%20materials.pdf>>
 - [33] YANG, Y. B., *Rigid Body Criteria in Nonlinear Element Formulation*, Computational Mechanics in Structural Engineering: Recent Developments and Future Trends, workshop in Beijing, China, September 24-28, 1991, edited by Cheng, F. Y., Fu, Z., Taylor & Francis, 1992, p. 466, ISBN 1851668675, cit. 1/2013, dostupné z <http://books.google.cz/books?id=Xb3UOEeL_5oC&dq=%22rigid+body+condition%22&source=gbs_navlinks_s>
 - [34] LUO, A. C. J., *Nonlinear deformable body dynamics*, Higher Education Press, Beijing a Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010
 - [35] SCHWEIZERHOF, K., NILSSON, L., HALLQUIST, J. O., *Crashworthiness Analysis in the Automotive Industry*, International Journal of Computer Applications in Technology, Special Issue on the Industrial Use of Finite-element Analysis, Vol. 5, Nos. 2/3/4, pp. 134-156, 1992
 - [36] *Conservation of energy*, Wikipedia, cit. 10/2012, dostupné z <http://en.wikipedia.org/wiki/Conservation_of_energy>
 - [37] *Stress (mechanics)*, Wikipedia, cit. 9/2012, dostupné z <[http://en.wikipedia.org/wiki/Stress_\(mechanics\)#Cauchy.E2.80.99s_stress_](http://en.wikipedia.org/wiki/Stress_(mechanics)#Cauchy.E2.80.99s_stress_)>

theorem.E2.80.94stress_tensor>

- [38] *Von Mises yield criterion*, Wikipedia, cit. 4/2012, dostupné z
<http://en.wikipedia.org/wiki/Von_Mises_yield_criterion>
- [39] *Conservation of mass*, Wikipedia, cit. 10/2012, dostupné z
<http://en.wikipedia.org/wiki/Conservation_of_mass>
- [40] BATHE, K. J., *On Finite Element Methods for Nonlinear Dynamic Response*,
7th European Conference on Structural Dynamics, Southampton, EURODYN
2008

Seznam použitých značek a symbolů

A	maximální hodnota plochy příčného řezu
\mathbf{A}	zpevňující termodynamické síly
\mathbf{B}	levý Cauchy-Greenův deformační tenzor
c	koheze
c	rychlost šíření zvukové vlny v materiálu
\mathbf{C}	matice tlumení
\mathbf{C}	pravý Cauchy-Greenův deformační tenzor
$\mathbf{C}^{\sigma e}$	tečný modul materiálu/materiálová tuhost
\mathbf{D}^e	matice pružné tuhosti
\mathbf{D}	tenzor rychlosti deformace
\mathbf{e}	Euler-Almansiho tenzor deformace
$\hat{\mathbf{e}}$	infinitesimální tenzor deformace v prostorových souřadnicích
E	modul pružnosti materiálu
E_b	modul pružnosti betonu
E_o	modul pružnosti oceli
\mathbf{E}	Green-Lagrangeův tenzor deformace
\mathbf{f}	vektor objemových sil
\mathbf{f}_0	vektor objemových sil v materiálových souřadnicích
F	celková zatěžovací síla
\mathbf{F}	zatěžovací vektor
\mathbf{F}	deformační gradient
H	zobecněný modul zpevnění
I	maximální hodnota momentu setrvačnosti
\mathbf{I}	jednotkový tenzor (matice)
I_1	první invariant tenzoru napětí
J	Jakobián
J_2	druhý invariant tenzoru napětí
\mathbf{K}	matice tuhosti
L	délka
l	délka
l_0	počáteční délka
\ln	přirozený logaritmus
m	hmotnost
\mathbf{M}	matice hmotnosti
\mathbf{n}	vektor normály
\mathbf{N}	nominální napětí
\mathbf{N}	vektor toku
$p_{1,2}$	plošné kruhové zatížení
p_3	liniové zatížení
\mathbf{q}	vektor tepelného toku
\mathbf{q}_0	tepelný tok v materiálových souřadnicích
r	poloměr
\mathbf{S}	druhé napětí Piola-Kirchhoff
$\mathbf{S}_t^{\sigma D}$	funkce závislá na Cauchyho napětí, rychlosti deformace (příp. i dalších proměnných)
t	tloušťka
t	čas

t_u	čas, ve kterém bylo dosaženo ustáleného stavu
t_k	čas ukončení výpočtu
Δt	časový krok
Δt_{crit}	kritický časový krok
Δt_{min}^{ele}	nejmenší časový krok zjištěný na elementu
Δt_z	doba trvání zatížení
\mathbf{T}	vektor napětí
\mathbf{u}	vektor posunutí
$\dot{\mathbf{u}}$	první derivace vektoru posunutí podle času (vektor rychlosti)
$\ddot{\mathbf{u}}$	druhá derivace vektoru posunutí podle času (vektor zrychlení)
\mathbf{U}	pravý stretch tenzor
Δv	změna rychlosti
$\dot{\mathbf{v}}$	vektor zrychlení
V	objem
\mathbf{V}	levý stretch tenzor
\dot{w}^{int}	rychlost změny hustoty potencionální energie vnitřních sil
\mathbf{x}	souřadnice v Eulerovském souřadném systému
\mathbf{X}	souřadnice v Lagrangeovském souřadném systému
α	součinitel tlumení (násobitel matice hmotnosti)
α_m	materiálový parametr
$\dot{\alpha}$	zpevnění materiálu
β	součinitel útlumu (násobitel matice tuhosti)
$\dot{\gamma}$	plastický násobitel
δ	redukční součinitel zohledňující nelinearity
$\boldsymbol{\varepsilon}$	infinitezimální tenzor deformace
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	elastický tenzor deformace
ε_x	lineární deformace
ε_M	ekvivalentní von Misesovo plastické přetvoření
ε_{M+}	ekvivalentní Misesovo plastické přetvoření na kladném povrchu
ε_{M-}	ekvivalentní Misesovo plastické přetvoření na záporném povrchu
ε_n	logaritmická deformace
$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	plastický tenzor deformace
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$	rychlost plastické deformace
φ	úhel vnitřního tření
Φ	funkce plasticity
μ	součinitel příčné kontrakce (Poissonův součinitel)
ρ	hustota deformovaného tělesa (v běžné konfiguraci)
ρ_0	počáteční hustota tělesa (v referenční konfiguraci)
ξ	poměrný útlum
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchyho tenzor napětí
$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$	korotační napětí
$\boldsymbol{\sigma}^\nabla$	objektivní tok napětí
σ	normálové napětí
σ_0	jednoosé normálové napětí na mezi kluzu
$\sigma_{1,2,3}$	hlavní napětí
σ_m	střední napětí
σ_{max}	maximální hlavní napětí

σ_{min}	minimální hlavní napětí
τ	smykové napětí
τ_0	kritická hodnota smykového napětí/ mez kluzu ve smyku
τ_{max}	maximální smykové napětí
ω_0	první vlastní frekvence
ω	vlastní frekvence (prvku)
ω_{max}^{sys}	maximální vlastní frekvence systému
ω_{max}^{ele}	maximální vlastní frekvence elementu
∇	divergence
∇_0	materiálová divergence
1D	jednorozměrný prostor
3D	trojrozměrný prostor

Seznam obrázků

- Obr. 2.1 Porovnání lineární teorie a teorie II. řádu na jednoduchém příkladu
- Obr. 2.2 Počáteční (nedeformovaná) a běžná (deformovaná) konfigurace tělesa
 - Obr. 2.2.1 Cauchyho tetrahedron a složky tenzoru napětí v prostoru
- Obr. 3.1.1 Tahová zkouška kovového materiálu
- Obr. 3.2.1 Jednodimenzionální pracovní diagramy
- Obr. 3.2.2 Izotropní zpevnění
- Obr. 3.2.3 Kinematické zpevnění
- Obr. 3.3.1 Grafické znázornění Trescovy podmínky plasticity
- Obr. 3.3.2 Grafické znázornění von Misesovy podmínky plasticity
- Obr. 3.3.3 Grafické porovnání Trescovy a von Misesovy podmínky plasticity
- Obr. 3.3.4 Grafické znázornění Mohr-Coulombovy podmínky plasticity
- Obr. 3.3.5 Grafické znázornění Drucker-Pragerovy podmínky plasticity
- Obr. 3.3.6 Grafické porovnání Mohr-Coulombovy a Drucker-Pragerovy podmínky plasticity
- Obr. 4.1.1 Kroky (události) časové integrace
- Obr. 4.1.2 Příklad procedury explicitní metody konečných prvků (elastický materiál)
- Obr. 4.2.1 Nosníkový prvek
- Obr. 4.2.2 Vliv velikosti časového kroku na stabilitu a přesnost
- Obr. 5.1.1 Tvar a rozměry kontejnmentu
- Obr. 5.1.2 Detail sítě konečných prvků
- Obr. 5.2.1 Model letadla
- Obr. 5.2.1 Rozměry modelu letadla
- Obr. 5.3.1 Průmět letadla na plášť kontejnmentu ve směru letu
- Obr. 5.3.2 Zatížení kontejnmentu nárazem letadla
- Obr. 5.5.1 Ideální pružno-plastický pracovní diagram
- Obr. 5.5.2 Pracovní diagram podpory s gapem

- Obr. 5.5.3 Průběh nárazu letadla do konstrukce kontejnmentu v čase
0.05 s, 0.13 s, 0.25 s a 0.6 s)
- Obr. 5.6.1 Šíření vzruchu v explicitní metodě v časových krocích
- Obr. 5.6.2 Podélné vlnění pásku
- Obr. 5.6.3 Podélné vlnění pásku s časovým krokem $8 \cdot 10^{-3}$ s
- Obr. 5.6.4 Podélné vlnění pásku s časovým krokem $8 \cdot 10^{-3}$ s - zhroucení výpočtu
- Obr. 5.6.5 Podélné vlnění pásku s časovým krokem $5 \cdot 10^{-3}$ s
- Obr. 5.6.6 Část modelu letadla
- Obr. 5.6.7 Deformace modelu přední části letadla
- Obr. 5.6.8 Vznik nestability ve výpočtu s časovým krokem $5 \cdot 10^{-9}$
- Obr. 5.7.1 Grafy závislosti max posunů na čase s různou hodnotou součinitele
útlumu pro betonový kontejnment
- Obr. 5.7.2 Grafy závislosti max posunů na čase s různou hodnotou součinitele
útlumu pro ocelový kontejnment
- Obr. 5.8.1 Trvalé deformace a rozsah plastických přetvoření u železobetonových
kontejnmentů s tl. 0.5 až 1.6 m
- Obr. 5.9.1 Trvalé deformace a rozsah plastických přetvoření u ocelových
kontejnmentů s tl. 0.06 až 0.14 m

Seznam grafů a tabulek

Graf 5.3.1 Časová závislost velikosti celkové síly působící na kontejnment

Graf 5.6.1 Vliv velikosti časového kroku na stabilitu

Tab. 5.6.1 Vliv velikosti časového kroku na stabilitu

Tab 5.8.1 Maximální hodnoty trvalých deformací a plastických přetvoření u
železobetonových kontejnmentů s tl. 0.5 až 1.6 m

Tab. 5.9.1 Maximální hodnoty trvalých deformací a plastických přetvoření u
ocelových kontejnmentů s tl. 0.06 až 0.14 m